

# LUYỆN TẬP HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

## I. Kiến thức cần nắm:

1. **Toạ độ của một điểm:**  $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

2. **Toạ độ của vector** :  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

Cho  $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B), C(x_C; y_C; z_C)$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$M \text{ là trung điểm của } AB \Leftrightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Leftrightarrow M\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

3. **Biểu thức toạ độ của các phép toán vector:**  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3).$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$

$$k\vec{a} = k(a_1; a_2; a_3) = (ka_1; ka_2; ka_3) \quad (k \in R)$$

4. **Biểu thức toạ độ của tích vô hướng:**  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3).$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

## II. Bài tập

**Bài 1:** Trong không gian với hệ toạ độ  $Oxyz$ , cho vecto  $\overrightarrow{AO} = 3(\vec{i} + 4\vec{j}) - 2\vec{k} + 5\vec{j}$ . Tìm toạ độ điểm A.

**Giải:**

Ta có  $\vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$

$$\overrightarrow{AO} = 3(\vec{i} - 4\vec{j}) - 2\vec{k} + 5\vec{j} = 3\vec{i} - 3 \cdot 4\vec{j} - 2\vec{k} + 5\vec{j} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$= 3 \cdot (1; 0; 0) - 7 \cdot (0; 1; 0) + 2 \cdot (0; 0; 1) = (3; -7; 2)$$

Vậy toạ độ điểm A(3; -7; 2)

**Bài 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{x} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ . Tìm toạ độ của  $\vec{x}$

$$\underline{\mathbf{A}}.x = (2; 3; -4).$$

$$\mathbf{B}.x = (-2; -3; 4).$$

$$\mathbf{C}.x = (0; 3; -4).$$

$$\mathbf{D}.x = (2; 3; 0).$$

**Bài 3:** Cho ba vector  $\vec{a} = (2; -5; 3)$ ,  $\vec{b} = (0; 2; -1)$ ,  $\vec{c} = (1; 7; 2)$ . Tính tọa độ của các vector:

a)  $\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$

b)  $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$

c)  $\vec{f} = -\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

d)  $\vec{g} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$

**Giải:**

a) Tính  $4\vec{a} = 4(2; -5; 3) = (4.2; 4.(-5); 4.3) = (8; -20; 12)$

$$\frac{1}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}(0; 2; -1) = \left(\frac{1}{3}.0; \frac{1}{3}.2; \frac{1}{3}.(-1)\right) = \left(0; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

$$3\vec{c} = 3.(1; 7; 2) = (3.1; 3.7; 3.2) = (3; 21; 6)$$

$$\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c} = \left(8 - 0 + 3; -20 - \frac{2}{3} + 21; 12 + \frac{1}{3} + 6\right) = \left(11; \frac{1}{3}; \frac{55}{3}\right)$$

b) Tính  $4\vec{b} = 4.(0; 2; -1) = (0; 8; -4)$

$$2\vec{c} = 2.(1; 7; 2) = (2; 14; 4)$$

$$\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c} = (2 - 0 - 2; -5 - 8 - 14; 3 - (-4) - 4) = (0; -27; 3)$$

c)  $\vec{f} = -\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$  (tự giải, ĐA:  $\vec{f} = \left(-\frac{5}{2}; \frac{11}{2}; -6\right)$ )

d)  $\vec{g} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$  (tự giải, ĐA:  $\vec{g} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ )

**Bài 4:** Tính  $\vec{a}.\vec{b}$  với:

a)  $\vec{a} = (3; 0; -6)$ ,  $\vec{b} = (2; -4; 0)$

b)  $\vec{a} = (1; -5; 2)$ ,  $\vec{b} = (4; 3; -5)$

c)  $\vec{a} = (2; -5; 3)$ ,  $\vec{b} = (0; 2; -1)$

**Giải:**

a)  $\vec{a}.\vec{b} = 3.2 + 0.(-4) + (-6).0 = 6$

b)  $\vec{a}.\vec{b} = 1.4 + (-5).3 + 2.(-5) = -21$

c) Tự giải

❖ **Phương trình mặt cầu (S) tâm  $I(a; b; c)$ , bán kính R:**

$$+ (S) : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

+ Phương trình:  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$  với  $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$  là phương

trình mặt cầu tâm  $I(a; b; c)$ , bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

**Bài 5:** Lập phương trình mặt cầu:

a) Có tâm  $I(3; 1; -1)$  và bán kính  $R = 2$ .

b) Đi qua điểm  $A(5; -2; 1)$  và có tâm  $C(3; -3; 1)$ .

c) Có đường kính  $AB$  với  $A(4; -3; 7)$ ,  $B(2; 1; 3)$ .

**Giải:**

a) Phương trình mặt cầu có tâm  $I(3; 1; -1)$  và bán kính  $R = 2$  có dạng:

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 &\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-(-1))^2 = 2^2 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4\end{aligned}$$

b) Ta cần tìm bán kính  $R = AC$

$$\overrightarrow{AC} = (-2; -1; 0), \quad AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 0} = \sqrt{5}$$

Phương trình mặt cầu có tâm  $C(3; -3; 1)$  và  $R = \sqrt{5}$  có dạng:

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 &\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-(-3))^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{5})^2 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5\end{aligned}$$

b) Ta cần tìm tâm  $I$  và bán kính  $R$

• Mặt cầu đường kính  $AB$  có tâm là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  và bán

$$\text{kính } R = \frac{1}{2} AB$$

Gọi  $I$  là trung điểm đoạn thẳng  $AB$

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4+2}{2} = 3, \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1, \quad z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{7+3}{2} = 5$$

$$\Rightarrow I = (3; -1; 5)$$

$$\text{Tính: } \overrightarrow{IA} = (1; -2; 2), \quad R = IA = |\overrightarrow{IA}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$$

Mặt cầu có tâm  $I(3; -1; 5)$  và bán kính  $R = 3$  có phương trình là:

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 &\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-(-1))^2 + (z-5)^2 = 3^2 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9\end{aligned}$$

**Bài 6:** Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu có phương trình:

a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$

b)  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 8y - 2z - 4 = 0$

c)  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0$

**Giải:**

a) Xét phương trình  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$  có  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

$$-2a.x = -8x \Rightarrow a = \frac{-8x}{-2x} = 4, -2by = -2y \Rightarrow b = \frac{-2y}{-2y} = 1, -2cz = 0 \Rightarrow z = 0, d = 1$$

Với  $a^2 + b^2 + c^2 - d = 4^2 + 1 + 0 - 1 = 16 > 0$

Suy ra phương trình  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$  là phương trình mặt cầu có tâm  $I(4; -1; 0)$  và

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{16} = 4$$

- $b, c$  Giải tương tự câu a ĐA: b)  $I(-2; -4; 1), R = 5$  c)  $I(4; -2; -1), R = 5$

❖ **BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**Câu 1:** Trong không gian Oxyz cho 2 vector  $\vec{a} = (1; 2; 2)$  và  $\vec{b} = (1; 2; -2)$ ; khi đó  $|\vec{a}(\vec{a} + \vec{b})|$  có giá trị bằng : A. 10 B. 18 C. 4 D. 8

**Câu 2:** Trong không gian Oxyz cho 2 vector  $\vec{a} = (3; 1; 2)$  và  $\vec{b} = (2; 0; -1)$ ; khi đó vector  $2\vec{a} - \vec{b}$  có độ dài bằng : A.  $3\sqrt{5}$  B.  $\sqrt{29}$  C.  $\sqrt{11}$  D.  $5\sqrt{3}$

**Câu 3:** Trong không gian Oxyz cho điểm  $M(1; 2; 3)$  Tìm tọa độ điểm  $M'$  là hình chiếu của M trên trục Ox  
A.  $M'(0; 1; 0)$ . B.  $M'(0; 0; 1)$ . C.  $M'(1; 0; 0)$ . D.  $M'(0; 2; 3)$ .

**Câu 4:** Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm  $I(1; 0; -2)$ , bán kính  $R = \sqrt{2}$

A. (S) :  $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 2$

B. (S) :  $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$ .

C. (S) :  $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$

D. (S) :  $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$ .

**Câu 5.** Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) :  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 6z + 49 = 0$ . Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

A.  $I(-4; 5; -3)$  và  $R = 7$

B.  $I(4; -5; 3)$  và  $R = 7$

C.  $I(-4; 5; -3)$  và  $R = 1$

D.  $I(4; -5; 3)$  và  $R = 1$

**Câu 6.** Trong không gian Oxyz, khoảng cách giữa hai điểm  $A(2; 3; 4)$  và  $B(6; 0; 4)$  bằng :

A.  $\sqrt{29}$ .

B.  $\sqrt{52}$ .

C. 5

D.  $\sqrt{7}$

**Câu 7.** Trong không gian Oxyz, cho  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$ . Khi đó tọa độ của  $\vec{a}$  là:

A.  $\vec{a} = (2; 1; -5)$

B.  $\vec{a} = (2; 1; 0)$

C.  $\vec{a} = (-2; -1; 5)$

D.  $\vec{a} = (2; 0; -5)$

**Câu 8.** Cho ba véc tơ  $\vec{a} = (5; -7; 2); \vec{b} = (0; 3; 4); \vec{c} = (-1; 1; 3)$ . Tọa độ véc tơ  $\vec{n} = 3\vec{a} + 4\vec{b} + 2\vec{c}$  là

A.  $\vec{n} = (13; -7; 28)$

B.  $\vec{n} = (13; 1; 3);$

C.  $\vec{n} = (-1; -7; 2);$

D.  $\vec{n} = (-1; 28; 3)$

Câu 9: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) :  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$ . Tâm của (S) có tọa độ là

A.  $(-1; -2; -3)$ .

B.  $(1; 2; 3)$ .

C.  $(-1; 2; -3)$ .

D.  $(1; -2; 3)$ .

**Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho vector  $\vec{a} = (0; 1; -2)$  và  $\vec{b} = (1; 2; -3)$ . Tìm tọa độ của vector  $\vec{a} - \vec{b}$  ? A.  $(1; -1; 1)$  B.  $(1; -1; -5)$  C.  $(-1; 1; -1)$  D.  $(-1; -1; 1)$

(Lưu ý: các bạn cần làm bài 3c,d, bài 4c, 6b,6c và các câu trắc nghiệm giải chi tiết sau đó chọn đáp án đúng)

