

Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

I. Phương trình tham số, phương trình chính tắc của đường thẳng.

a. **Vectơ chỉ phương của đường thẳng:** Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của \vec{u} song song hoặc trùng với d .

Nhân xét: Nếu đường thẳng d vuông góc với giá hai vectơ không cùng phương \vec{a} và \vec{b} thì một VTCP của d là $[\vec{a}, \vec{b}]$.

b. Phương trình tham số của đường thẳng.

Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a; b; c)$. Khi đó $M(x; y; z) \in d$ khi và chỉ khi $\overline{M_0M}$ cùng phương với \vec{u} hay $\overline{M_0M} = t\vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Hệ phương trình (1) gọi là phương trình tham số của đường thẳng d .

c. Phương trình chính tắc của đường thẳng.

Nếu a_1, a_2, a_3 đều khác 0 thì ta viết phương trình của đường thẳng Δ dưới dạng chính tắc như

sau:
$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

Ví dụ 1: Viết pttt của đường thẳng Δ biết:

a. Δ đi qua điểm $M_0(1; 2; 3)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1; -2; 5)$

b. Δ đi qua 2 điểm $A(2; 4; -2)$ và $B(0; 3; -1)$

c. Δ đi qua điểm $M(1; 3; -2)$ và vuông góc với mặt phẳng (P): $x - 2y - 3z + 1 = 0$

Giải:

a. Phương trình tham số của Δ là:
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$$

b. Vectơ chỉ phương của Δ là: $\overline{AB} = (-2; -1; 1)$

Phương trình tham số của Δ qua A và nhận $\overline{AB} = (-2; -1; 1)$ làm vectơ chỉ phương là:

$$\Delta : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 4 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

c. Vì $\Delta \perp (P)$ nên Δ nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; -3)$ của (P) làm vectơ chỉ phương.

Phương trình tham số của Δ qua $M = (1; 3; -2)$ và nhận $\vec{n} = (1; -2; -3)$ làm vectơ chỉ phương là:

$$\Delta : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$

Ví dụ 2: Cho đường thẳng Δ có pttt
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + t \end{cases}$$
.

Tìm tọa độ một điểm và một vtcp của đường thẳng Δ ?

Giải :

Tọa độ điểm thuộc Δ là : $M(1;2;-3)$

Tọa độ véc tơ chỉ phương của Δ : $\vec{u} = (2;-1;1)$

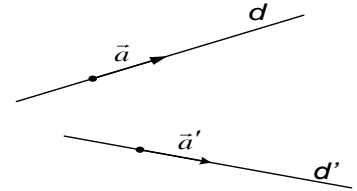
II. Điều kiện để hai đường thẳng song song, cắt nhau, chéo nhau.

1. Điều kiện để hai đường thẳng song song: tự học sgk/85

2. Điều kiện để hai đường thẳng cắt nhau: tự học sgk/86

3. Điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau.

Cho 2 đường thẳng $d : \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}, d' : \begin{cases} x = x'_0 + t'a'_1 \\ y = y'_0 + t'a'_2 \\ z = z'_0 + t'a'_3 \end{cases}$



d và d' chéo nhau \Leftrightarrow hai VTCP không cùng phương và hệ pt ẩn t, t'

sau vô nghiệm: $\begin{cases} x_0 + ta_1 = x'_0 + t'a'_1 \\ y_0 + ta_2 = y'_0 + t'a'_2 \\ z_0 + ta_3 = z'_0 + t'a'_3 \end{cases}$

Ví dụ 3: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng : $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases}, d' : \begin{cases} x = 1 + 3t' \\ y = -2 + 2t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases}$

Giải :

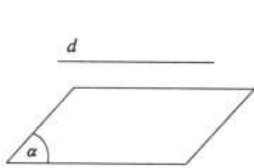
- d và d' lần lượt có véc tơ chỉ phương là: $\vec{a} = (2;3;1), \vec{a}' = (3;2;2)$

Ta thấy rằng $\vec{a} \neq \vec{a}'$ nên \vec{a}, \vec{a}' không cùng phương.

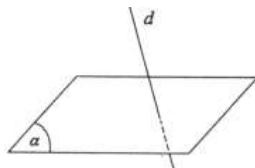
Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 1 + 2t = 1 + 3t' \\ -1 + 3t = -2 + 2t' \\ 5 + t = -1 + 2t' \end{cases} \text{ Phương trình vô nghiệm, do đó } d \text{ và } d' \text{ chéo nhau}$$

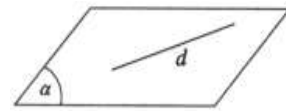
- **Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng.**



$d \parallel (P),$



$d \text{ cắt } (P),$



$d \subset (P)$

Cho đường thẳng d có phương trình tham số: $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \quad (1)$

và mặt phẳng (P) có phương trình: $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$

Xét phương trình: $A(x_0 + ta_1) + B(y_0 + ta_2) + C(z_0 + ta_3) + D = 0 \quad (I)$

- Nếu (I) vô nghiệm thì $d \parallel (P)$
- Nếu (I) có đúng 1 nghiệm t_0 thì d cắt (P) tại điểm M_0 .
- Nếu (I) có vô số nghiệm thì d thuộc (P) .

ví dụ 4: Tìm số giao điểm của mặt phẳng (P): $x+y+z-3=0$ và đường thẳng d: $\begin{cases} x=2+t \\ y=3-t \\ z=1 \end{cases}$

Giải:

Thay pt đường thẳng d vào (P) ta có $(2+t)+(3-t)+1-3=0 \Leftrightarrow 4=0 \Rightarrow$ PT vô nghiệm
 $\Rightarrow d // (P)$

❖ LUYỆN TẬP

Bài tập 1: Viết PTTS của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) d đi qua M(5; 4; 1) và có VTCP $\vec{a}=(2;-3;1)$.

b) d đi qua B(2; 0; -3) và song song với $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-3+3t \\ z=4t \end{cases}$

c) d đi qua P(1; 2; 3), Q(4; 4; 4)

Giải:

a. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua M và có véc tơ chỉ phương $\vec{n}=(2;-3;1)$ là

$$d: \begin{cases} x=5+2t \\ y=4-3t \\ z=1+t \end{cases}$$

b. Đường thẳng d // Δ nên VTCP $\vec{u}_{\Delta}=\vec{u}_d$

Ta có : $\vec{u}_{\Delta}=(2;3;4)$

Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua B(2; 0; -3) và song song với $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-3+3t \\ z=4t \end{cases}$ là

$$d: \begin{cases} x=2+2t \\ y=3t \\ z=-3+4t \end{cases}$$

c. Ta có $\vec{PQ}=(3;2;1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua hai điểm P(1; 2; 3), Q(4; 4; 4) là d: $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2+2t \\ z=3+t \end{cases}$

Bài 2: Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d và d' cho bởi các phương trình sau

$$d: \begin{cases} x=-3+2t \\ y=-2+3t \\ z=6+4t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x=5+t' \\ y=-1-4t' \\ z=20+t' \end{cases}$$

Giải:

Đường thẳng d đi qua $M_1(-3;-2;6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(2;3;4)$

Đường thẳng d' đi qua $M_2(5;-1;20)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(1;-4;1)$

Ta nhận thấy \vec{u}_1, \vec{u}_2 không cùng phương nên d và d' chỉ có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} -3 + 2t = 5 + t'(1) \\ -2 + 3t = -1 - 4t'(2) \\ 6 + 4t = 20 + t'(3) \end{cases}$$

Từ (1) với (3), trừ vế với vế ta có $2t = 6 \Rightarrow t = 3$, thay vào (1) có $t' = -2$

Từ đó d và d' có điểm chung duy nhất $M(3;7;18)$. Do đó d và d' cắt nhau tại M .

Bài 3: Tìm a để hai đường thẳng sau đây cắt nhau

$$d: \begin{cases} x = 1 + at \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$$

Giải:

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} 1 + at = 1 - t'(1) \\ t = 2 + 2t'(2) \\ -1 + 2t = 3 - t'(3) \end{cases}$$

Đường thẳng d cắt d' khi và chỉ khi hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Thay $t = 2 + 2t'$ vào (3) ta được:

$$-1 + 2(2 + 2t') = 3 - t' \Leftrightarrow -1 + 4 + 4t' = 3 - t' \Leftrightarrow 5t' = 0 \Leftrightarrow t' = 0$$

Suy ra $t = 2$.

Thay $t = 2$ và $t' = 0$ vào (1) ta được $1 + a \cdot 2 = 1 \Rightarrow a = 0$

Vậy $a = 0$ thì d và d' cắt nhau.

$$\text{Bài 4: Tính khoảng cách giữa đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = -3 + 2t(1) \\ y = -1 + 3t(2) \\ z = 2 - 3t(3) \end{cases} \text{ và mặt phẳng}$$

$$(\alpha): 2x - 2y + z + 3 = 0$$

Giải:

Xét vị trí tương đối giữa mặt phẳng và đường thẳng

Thay (1), (2), (3) vào mặt phẳng (α) ta được:

$$2 \cdot (-3 + 2t) - 2 \cdot (-1 + 3t) + 2 - 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow 0t - 2 = 0$$

Suy ra pt vô nghiệm. Vậy $d // (\alpha)$.

Đường thẳng $d // (\alpha)$ nên khoảng cách giữa mp (α) và Δ bằng khoảng cách từ một điểm thuộc Δ đến mp (α) .

$$\text{Ta có điểm } M(-3; -1; -1) \in \Delta \text{ nên } d(\Delta, (\alpha)) = d(M, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) - 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Bài 5: Cho hai đường thẳng } d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = 1 \end{cases}. \text{ CM } d \text{ và } d' \text{ chéo nhau.}$$

Giải:

Đường thẳng d đi qua $M_1(1;2;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1;2;3)$

Đường thẳng d' đi qua $M_2(1;3;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (1;-2;0)$

Ta nhận thấy \vec{u}_1, \vec{u}_2 không cùng phương nên d và d' chỉ có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} 1-t=1+t' \\ 2+2t=3-2t' \\ 3t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+t'=0 \\ 2t+2t'=1 \\ t=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t+t'=0 \\ t+t'=\frac{1}{2} \text{ (vn)} \\ t=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy hai đường thẳng chéo nhau.

❖ NỘI DUNG BÀI TẬP ÔN TẬP

Bài trắc nghiệm:

Câu 1. Cho đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$. Điểm nào sau đây thuộc d ?

- A. $M(1;2;3)$. B. $M(1;-2;3)$. C. $M(2;-1;1)$. D.

$M(-1;2;-3)$.

Câu 2. Cho đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$. Một vectơ chỉ phương của

đường thẳng d có tọa độ bằng

- A. $(1;2;3)$. B. $(1;-2;3)$. C. $(2;-1;1)$. D. $(-1;2;-3)$.

Câu 3. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(1,-2,3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (2,1,4)$.

- A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \\ z=3+4t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \\ z=4+3t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+t \\ z=-3+4t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-2+t \\ z=3-4t \end{cases}$.

Câu 4. Cho đường thẳng d đi qua hai điểm $M(1,-2,3), N(2,1,3)$. Phương trình đường thẳng d có dạng:

- A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+3t \text{ (} t \in \mathbb{R} \text{)} \\ z=3 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=1+t \\ y=3-2t \text{ (} t \in \mathbb{R} \text{)} \\ z=3t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3+t \text{ (} t \in \mathbb{R} \text{)} \\ z=3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \text{ (} t \in \mathbb{R} \text{)} \\ z=3+3t \end{cases}$.

Câu 5. Cho d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x+3y-7z+1=0$. Phương trình chính tắc của d là

- A. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-7}$. B. $\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{-7}$.
C. $\frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-7}$. D. $\frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+7}{3}$.

Câu 6. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$ và $d_2: \begin{cases} x=2t \\ y=1+4t \\ z=2+6t \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây

đúng?

A. $d_1 // d_2$. B. d_1, d_2 trùng nhau . C. d_1, d_2 cắt nhau . D. d_1, d_2 chéo nhau.

Câu 7. Cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 3 + 4t' \\ y = 5 + 6t' \\ z = 7 + 8t' \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $d_1 \equiv d_2$ B. $d_1 \perp d_2$ C. $d_1 // d_2$ D. d_1 và d_2 chéo nhau

Câu 8. Giao điểm của hai đường thẳng $d : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$ và $d' : \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}$ là

A. (-3;-2;6) B. (5;-1;20) C. (3;7;18) D.(3;-2;1)

Câu 9: Tìm giao điểm của $d : \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ và (P): $2x - y - z - 7 = 0$

A. M(3;-1;0) B. M(0;2;-4) C. M(6;-4;3) D. M(1;4;-2)

Câu 10. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm B(2 ; 0 ; -3) và song song với

đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$ là :

A. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$; C. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$; D. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$