# Bài 2: TÍCH PHÂN

## III. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. **Phương pháp đổi biến số**

***Định lí 1:*** *Cho hàm số f(x) liên tục trên [a; b]. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$ sao cho $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ và $a \le \varphi(t) \le b$ với $\forall t \in [\alpha; \beta]$.*
*Khi đó:* $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

**Phương pháp đổi biến dạng 1**:

**Nội dung PP:** Giả sử cần tính $I = \int_a^b f(x)dx$, sử dụng phương pháp đổi biến dạng 1, ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Đặt $x = \varphi(t)$ và biểu diễn $f(x)dx = g(t)dt$
- **Bước 2:** Đổi cận $x = a \Rightarrow t = \alpha; x = b \Rightarrow t = \beta$
- **Bước 3:** Tính tích phân $I = \int_\alpha^\beta g(t)dt$

**Ví Dụ 1:** Tính

a) $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ b) $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$

Giải:

a) Đặt $x = \tan t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ $dx = \frac{dt}{cos^2 t}$

Đổi cận:

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $t$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ |

Ta có: $1 + x^2 = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{cos^2 t} \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = cos^2 t$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 t.\frac{dt}{cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

**b)**Đặt x = sint $\Rightarrow$ dx = costdt

Đổi cận :

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $t$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |

Khi đó: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

**Phương pháp đổi biến dạng 2**:

**Nội dung PP:** Giả sử cần tính $I = \int_a^b f(x)dx$, sử dụng phương pháp đổi biến dạng 2, ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Đặt $t = u(x)$ và biểu diễn $f(x)dx = g(t)dt$
- **Bước 2:** Đổi cận $x = a \Rightarrow t = u(a), x = b \Rightarrow t = u(b)$
- **Bước 3:** Tính tích phân $I = \int_{u(a)}^{u(b)} g(t)dt$

**Ví Dụ 2:** Tính : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.\sin x\, dx$

**Giải:**

Đổi biến số: $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

Đổi cận :

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|
| $t$ | $1$ | $0$ |

Khi đó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.\sin x dx = -\int_1^0 u^2 du = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$

**Ví dụ 3:** Tính

a) $I = \int_0^3 \frac{x^2}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} dx$ b) $I = \int_0^1 (2x+1)dx$

**Giải:**

**a)**Đặt u = 1 + x $\Rightarrow$ du = dx

Đổi cận:

| $x$ | $0$ | $3$ |
|---|---|---|
| $t$ | $1$ | $4$ |

Ta có: $\int_0^3 \frac{x^2}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} dx = \int_1^4 \frac{(u-1)^2}{u^{\frac{3}{2}}} dx = \left(\frac{3u^{\frac{3}{2}}}{2} - 4u^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{-3}{2}}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{5}{3}$

**b)**Đặt u = 2x +1 => du = 2 dx

Đổi cận:

| $x$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $t$ | $1$ | $3$ |

Khi đó: $I = \int_0^1 (2x+1)dx = \frac{1}{2}\int_1^3 u^2 du = \frac{u^3}{6}\Bigg|_1^3 = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = \frac{13}{3}$

**2. Phương pháp tích phân từng phần**

***Định lí :*** *Nếu u = u(x) và v = v(x) là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên [a; b] thì:* $\boxed{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu}$

**Nội dung phương pháp:**

**Bước 1:** Xác định u, dv và tìm v, du

**Bước 2:** Áp dụng công thức $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

**Ví dụ 4:** Tính tích phân sau

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\sin x dx$ b) $\int_1^e x^2 \ln x dx$

Giải:

a) Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\sin x dx = (x+1)(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = (x+1)(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$

b)Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

Khi đó: $\int_1^e x^2 \ln x dx = (\frac{x^3}{3}.\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}dx = (\frac{x^3}{3}.\ln x)\Big|_1^e - \frac{x^3}{9} = \frac{1}{9}(2e^3+1)$

**Chú ý:** Các dạng sau thường dùng PP tính tích phân từng phần

$$\left.\begin{array}{l} \int_a^b p(x)e^{\alpha x+\beta}dx \\ \int_a^b p(x)\sin(\alpha x+\beta)dx \\ \int_a^b p(x)\cos(\alpha x+\beta)dx \end{array}\right\} \rightarrow \text{Đặt} \quad u = p(x)$$

$$\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\ln(\alpha x+\beta)dx \rightarrow \text{Đặt} \quad u = \ln(ax+b)$$

❖ **Bài tập tự luận:**

Tính các tích phân sau

**a)** $\int_0^1 \frac{e^x(1+x)}{1+xe^x}dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{cos^5 x}dx$ c/ I= $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos x.dx$ d) $\int_0^1 x.e^x dx$

❖ **Bài tập củng cố:**

**Câu 1:** Giá trị của tích phân I = $\int_0^1 xe^{2x}dx$ bằng:

A. $\frac{e^2+1}{4}$ B. $e^2$ C. $\frac{e^2-1}{4}$ D. $\frac{e^2-1}{2}$

**Câu 2** : Cho I= $\int_1^2 x(x-1)^5 dx$ và $u = x-1$. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau

A . $\int_0^1 u^5(u+1)du$ B . $I = \int_{\frac{2}{1}}^{1} x(x-1)^5 dx$ C. $I = \frac{13}{42}$ D . $I = \left(\frac{u^6}{6}+\frac{u^5}{5}\right)\Big|_0^1$

**Câu 3:** Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx$.

**A.** $I=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. **B.** $I=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $I=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $I=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.