

## Bài 4. CẤP SỐ NHÂN

### I. Định nghĩa

**Định nghĩa** : Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi  $q$ . Số  $q$  được gọi là công bội của cấp số nhân.

Nếu  $(u_n)$  là cấp số nhân  $\Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} \cdot q$

*Đặc biệt :*

Khi  $q = 0$ , cấp số cộng có dạng  $u_1, 0, 0, 0, \dots$

Khi  $q = 1$ , cấp số cộng có dạng  $u_1, u_1, u_1, \dots$

Khi  $u_1 = 0$ , cấp số cộng có dạng  $0, 0, 0, 0, \dots$

**Ví dụ 1** : Dãy số  $1, -2, 4, -8, 16, -32$  là CSN hữu hạn với  $u_1=1$  và công bội  $q = -2$ .

**Ví dụ 2**: Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân? Vì sao?

a)  $4; 6; 9; 13,5$ .

b)  $-1,5; 3; -6; -12; 24; -48; 96; -192$

c)  $7; 0; 0; 0; 0; 0$

**Giải :**

a) Dãy số là cấp số nhân; vì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với  $1,5$ .

b) không là cấp số nhân.

c) là cấp số nhân, công bội  $q = 0$

### II. Số hạng tổng quát

**Định lý 1**: Cấp số nhân có số hạng đầu  $u_1$  và công bội  $q$  thì số hạng tổng quát  $u_n$  được xác định bởi công thức:  $u_n = u_1 \cdot (q)^{n-1}, \forall n \geq 2$

**Ví dụ 3**: Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với  $u_1 = 3, q = -\frac{1}{2}$

a) Tính  $u_9$

b) Hỏi  $\frac{3}{64}$  là số hạng thứ mấy?

**Giải:**

a) Áp dụng công thức (2), ta có:  $u_9 = u_1 \cdot q^8 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{3}{256}$

b) Theo công thức (2), ta có:  $u_n = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{3}{64} \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^6$   
 $\Leftrightarrow n-1 = 6$   
 $\Leftrightarrow n = 7$

Vậy số hạng  $\frac{3}{64}$  là số hạng thứ bảy.

### III. Tính chất

**Định lý 2**: Trong cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là:  $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$

#### **IV. Tổng n số hạng đầu tiên của CSN**

**Định lý 3:** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với công bội  $q \neq 1$ . Đặt  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$\text{Khi đó: } S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

**Chú ý:** nếu  $q = 1$  thì cấp số nhân là  $u_1; u_1; u_1; u_1 \dots$ . Khi đó  $S_n = n \cdot u_1$ .

**Ví dụ 4:** Tính tổng:  $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$

**Giải:** Ta có: 
$$S = \frac{1(1 - \frac{1}{3^n})}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3(3^n - 1)}{2 \cdot 3^n}$$

#### **❖ LUYỆN TẬP:**

**Bài 1:** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với  $u_1 = 3, q = -2$

- Tính  $u_{10}$
- Hỏi 192 là số hạng thứ mấy?
- Tính tổng của mười số hạng đầu tiên.

**Giải:**

a) Áp dụng công thức (2), ta có:  $u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 3 \cdot (-2)^9 = 1536$

b) Theo công thức (2), ta có:  $u_n = 3 \cdot (-2)^{n-1} = 192 \Leftrightarrow (-2)^{n-1} = (-2)^6$   
 $\Leftrightarrow n - 1 = 6$   
 $\Leftrightarrow n = 7$

Vậy số hạng 192 là số hạng thứ bảy.

c) Áp dụng công thức:  $S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q} \Leftrightarrow S_{10} = \frac{3 \cdot (1 - (-2)^{10})}{1 - 10} = 341$

**Bài 2:** Cho biết CSN  $(u_n)$  và công bội  $q$ :

a) Biết  $u_1 = 2, u_6 = 486$ . Tìm  $q$ .

b) Biết  $q = \frac{2}{3}, u_4 = \frac{8}{21}$ . Tìm  $u_1$

**Giải:**

a) Ta có:  $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 2$ .

$$\text{Vậy: } u_6 = u_1 \cdot q^5 = 2 \cdot q^5 = 486 \Leftrightarrow q^5 = 243 = 3^5 \Rightarrow q = 3$$

b) Ta có:  $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 2$ .

$$\text{Vậy: } u_4 = u_1 \cdot q^3 = u_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{21} \Rightarrow u_1 = \frac{8}{21} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{7}$$

**BTVN:**

**Bài 1:** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với  $u_1 = -5, q = \frac{1}{2}$

a) Tính  $u_6$

b) Hỏi  $\frac{-5}{512}$  là số hạng thứ mấy?

c) Tính tổng của 20 số hạng đầu tiên

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:**

**Câu 1:** Cho CSN có  $u_1 = 2$  và  $u_3 = 18$ . Khi đó  $q$  là ?

- A.  $\pm \frac{1}{2}$       B.  $\pm 2$       C.  $\pm 3$       D. Tất cả đều sai

**Câu 2:** Số hạng đầu  $u_1$  và công bội  $q$  của cấp số nhân  $(u_n)$  biết  $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases}$  là :

- A/  $u_1 = 5; q = 2$       B/  $u_1 = 6; q = 2$       C/  $u_1 = 6; q = 3$       D/  $u_1 = 5; q = 3$

**Câu 3:** Cho cấp số nhân với số hạng đầu là  $u_1 = 1$  và  $q = -1$ . Chọn đáp án đúng.

- A.  $S_{2007} = 0$ .      B.  $S_{2007} = 1$       C.  $S_{2007} = -1$ .      D.  $S_{2007} = 2$ .

**Câu 4:** Năm số hạng đầu của cấp số nhân có  $u_1 = 2$  và  $u_3 = -8$  là dãy số nào sau đây?

- A. 2, 4, 8, 16, 32.      B. 2, -4, 8, -16, 32.      C. 2, 4, -8, -16, 32.      D. Không tồn tại.