Bài 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm.

1. Định nghĩa:

Định nghiã 1: Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số y = f(x) xác định trên khoảng K hoặc trên K\{x_0}

Ta nói hàm số y = f(x) có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$

Nhận xét: $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ với c là hằng số.

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau:

a. $I = \lim\limits_{x \to 2}(4x - 3)$ b. $J = \lim\limits_{x \to 3}\left(\sqrt{x^2+7} - 4\right)$

Giải: a. $I = \lim\limits_{x \to 2}(4x - 3) = 4.2 - 3 = 5$

b. $J = \lim\limits_{x \to 3}\left(\sqrt{x^2+7} - 4\right) = \sqrt{3^2+7} - 4 = 0$

2. Định lí về giới hạn hữu hạn.

Định lí 1:

a) Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ v $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. Khi đó

- ❖ $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$
- ❖ $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x)g(x)] = L.M$
- ❖ $\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}; (M \neq 0)$

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

Ví dụ 2:Tính các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{8x+1}{4x^2-6}$ b. $\lim\limits_{x \to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$

Lưu ý: ta thay x = x_0 vào f(x)

+Nếu mẫu khác 0 thì thay x = x_0 vào

+Nếu mẫu bằng 0 thì ta phân tích tử thành nhân tử để rút gọn ở mẫu.

Giải:

a) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{8x+1}{4x^2-6} = \dfrac{8.1+1}{4.1-6} = -\dfrac{9}{2}$

b. $\lim\limits_{x \to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3} = \lim\dfrac{(x-3).(x+3)}{x+3} = \lim(x-3) = -3-3 = -6$

3. Giới hạn một bên.

Định nghĩa 2:

- Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng $\left(x_0;b\right)$

Số L đgl giớ hạn bên phải của hàm số y = f(x) khi $x_n \to x_0$ x nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$

Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$

- Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng $\left(a;x_0\right)$

Số L đgl giớ hạn bên trái của hàm số y = f(x) khi $x_n \to x_0$ x nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$

- Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$

Định lí 2: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) =$ L.

II. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực.

Định nghĩa 3:

a) Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.

Ta nói hàm số y = f(x) có giới hạn là L khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, x_n > a và $x_n \to +\infty$ thì $f(x_n) \to L$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to +\infty$

b) Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng $(-\infty;a)$.

Ta nói hàm số y = f(x) có giới hạn là L khi $x \to -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, x_n < a và $x_n \to -\infty$ thì $f(x_n) \to L$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to -\infty$

Chú ý:

a) Với c, k: hằng số và $k \in Z^+$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} c = c$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$

b) Địn h lí 1 về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \to x_0$ vẫn còn đúng khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$

Ví dụ 3: Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^2 - 3x}{x^2 + 2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x}{1 - 2x^2}$

Lưu ý :Đối với dạng $\frac{f(x)}{g(x)}$ là các đa thức biến x ta chia cả tử và mẫu cho x có số mũ cao nhất

Giải:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^2 - 3x}{x^2 + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x^2}} \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 5 - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2}} = 5$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4x}{1-2x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{4}{x}}{\frac{1}{x^2}-2} = -\dfrac{1}{2}$

III. Giới hạn vô cực của hàm số

1.Giới hạn vô cực:

Định nghĩa 4: Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng $(a;+\infty)$

Ta nói hàm số y = f(x) có giới hạn là $-\infty$ khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, x_n > a và $x_n\to+\infty$ thì $f(x_n)\to-\infty$

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ hay $f(x)\to-\infty$ Khi $x\to+\infty$

- **Nhận xét:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(-f(x)) = -\infty$

2. Một vi giới hạn đặc biệt.

a/ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương

b/ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số lẻ

c/ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số chẵn

3:Một vài quy tắc về giới hạn vô cực.

a/ Quy tắc tìm giới hạn của tích: $f(x).g(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$
L > 0	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
L < 0	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b/ **Quy tắc tìm giới hạn của thương** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$**:**

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	*Dấu của g(x)*	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	*Tuỳ ý*	*0*
L > 0	*0*	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
L < 0		+	$-\infty$
		-	$+\infty$

Chú ý: Quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x\to x_0^+, x\to x_0^-$,

Ví dụ 4: Tính

a) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-4}{x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^2-3x)$

Giải:

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0, x-1<0$, với mọi x <1

$\lim\limits_{x\to 1^-}(2x-4)=2.1-4=-2<0$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-4}{x-1}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}(5x^2-3x)=\lim\limits_{x\to +\infty}x^2.\lim\limits_{x\to +\infty}(5-\dfrac{3}{x})=+\infty$

❖ LUYỆN TẬP

Bài 1: Tính các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-1}{x+1}$ b. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x+2}$ c. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$

d. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{17}{x^2+1}$ e. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^2+3x+1}{2x^2-2}$

Giải:

a. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{(-3)^2-1}{-3+1}=\dfrac{9-1}{-2}=-4$

b. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2).(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-4$

c. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{(x-6)}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+3}=\dfrac{1}{6}$

d. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{17}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{17}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{0}{1}=0$

e. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^2+3x+1}{2x^2-2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{2}{x^2}}=\dfrac{5+0+0}{2}=\dfrac{5}{2}$

Bài 2: Tìm các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-5}{(x-2)^2}$ b. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-7}{x-1}$ c. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-7}{x-1}$

Giải:

a. Ta có $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)=1>0, \lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2=0$ và $(x-2)^2>0, \forall x\neq 2$

Vậy $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-5}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{0}=+\infty$

b. $\lim\limits_{x\to 1^-}(2x-7)=-5<0, \lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$ và khi $x\to 1^-$ thì $x-1<0$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-7}{x-1}=\dfrac{-5}{0}=+\infty$

c. $\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-7)=-5<0, \lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$ và khi $x\to 1^+$ thì $x-1>0$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-7}{x-1}=\dfrac{-5}{0}=-\infty$

Bài 3. Tính các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^4-x^2+x-1)$

b. $\lim\limits_{x\to -\infty}(-2x^3+3x^2-5)$

Giải:

a. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^4-x^2+x-1)=\lim\limits_{x\to +\infty}x^4.\lim\limits_{x\to +\infty}(1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^4})=+\infty.(1-0+0-0)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-2x^3+3x^2-5)=\lim\limits_{x\to -\infty}x^3.\lim\limits_{x\to -\infty}(-2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x^3})=-\infty.(-2)=+\infty$ (k = 3 :số lẻ)

BTVN:

Bài 1. Tính các giới hạn sau

1. $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x+7)$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{4-x}$
4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3-2x^2+2}{x-2}$
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{x^2-2}$
6. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+3}{1-x}$
7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x+1}{x^2-2}$
8. $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^4-4x^3+x-1)$