Bài 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

I. Hàm số liên tục tại một điểm.

Định nghĩa 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục** tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

***Các bước xét tính liên tục của hàm số tại điểm x_0?

- Tìm tập xác định, xét xem x_0 có thuộc TXĐ hay không.
- Tính $f(x_0)$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
- So sánh $f(x_0)$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

+ Nếu $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Rightarrow$ Hàm số liên tục tại x_0.

+ Nếu $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Rightarrow$ Hàm số gián đoạn tại x_0.

Ví dụ 1 :.Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ tại $x_0 = 2$

Giải :

TXĐ : D = R\{3}

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{x-3} = \frac{2.2}{2-3} = -4$$

$$f(2) = \frac{2.2}{2-3} = -4$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$$

Vậy hàm số liên tục tại $x_0 = 2$

II. Hàm số liên tục trên một khoảng.

Định nghĩa 2:

Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục trên 1 khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục trên [a ; b] nếu nó liên tục trên (a ;b) và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Nhận xét: đồ thị của 1 hàm số liên tục trên 1 khoảng là 1 "đường liền" trên khoảng đó.

III. Một số định lí cơ bản.

Định lí 1:

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực R.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ và các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

Định lí 2: Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó

a) Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x).g(x)$ liên tục tại x_0;

b) Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

<u>Ví dụ 2:</u> Xét tính liên tục các hàm số sau $y = \dfrac{(x+1)\tan x - \cos x}{x-2}$

<u>Giải</u> :

1. TXĐ : D = R \{ 2; $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$,k $\in Z$ }

Vậy hàm số liên tục tại mọi điểm x $\neq$ 2 và x $\neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (k $\in Z$)

Ví dụ 3: Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của nó

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} \text{ khi } x > 2 \\ 2x + 1 \text{ khi } x \le 2 \end{cases}.$$

Giải:

TXĐ: $D = R$.

+ Với $x > 2$: $f(x)$ là phân thức hữu tỉ nên liên tục $(2; +\infty)$.

+ Với $x < 2$: $f(x)$ là đa thức bậc nhất nên liên tục $(-\infty; 2)$.

+ Với $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (2x+1) = 5$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = 4$$

$\Rightarrow$ không tồn tại $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Do đó hàm số không liên tục tại x = 2.

Vậy $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Định lí 3: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$, thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a; b)$.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng phương trình :$x^5 + x - 1$ có nghiệm trên(-1;1).

<u>Giải</u>: Hàm số f(x) = $x^5 + x - 1$ liên tục trên R nên f(x) liên tục trên [-1; 1] .

f(-1) = -3, f(1) = 1

do đó f(-1) .f(1) = -3 < 0.

Vậy phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$

❖ **LUYỆN TẬP**

Bài 1 : a) Xét tính liên tục của hàm số y = g(x) tại $x_0 = 2$, biết:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 5 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$$

b/ Cần thay số 5 bởi số nào để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$

Giải:

a) Với $x \neq 2$ thì $g(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2} = x^2 + 2x + 4$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2}(x^2 + 2x + 4) = 12 \neq g(2) = 5$$

Vậy hàm số không liên tục tại $x_0 = 2$ .Vì $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 12 \neq g(2)$

b) Cần thay số 5 bởi số 12

Bài 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x+2, x<-1 \\ x^2-1, x\geq -1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

Giải:

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}(3x+2) = 3(-1)+2 = -1$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

Vậy hàm số không liên tục tại x = -1

Bài 3: . Cho hàm số f(x) = $\begin{cases} ax+2 khi x\geq 1 \\ x^2+x-1 khi x<1 \end{cases}$

Xét tính liên tục của hàm số trên toàn trục số.

Giải :

- Với x >1 : f(x) = ax + 2 nên hàm số liên tục.
- Với x < 1: f(x) = $x^2 + x - 1$ nên hàm số liên tục.
- Tại x = 1: f(1) = a +2 .

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(ax+2) = a+2$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+x+1) = 1$

a = -1 thì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ nên hàm số liên tục tại x = 1.

a $\neq -1$ hàm số gián đoạn tại x = 1

Vậy:a = -1 thì hàm số liên tục trên R.a $\neq$ -1 thì hàm số liên tục trên (- $\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

❖ **BTVN :**

Bài 1 : Cho hàm số f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} khi x\neq 1 \\ a khi x=1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại x_0= 1

Bài 2: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ tại $x_0 = 2$.

Bài 3: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 6}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 2x+1 & \text{khi } x = 3. \end{cases}$ **tại** $x_0 = 3$.