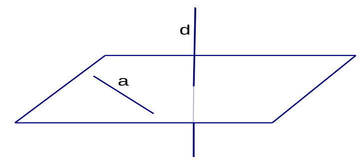
Bài 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

I.Định nghĩa:

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α).

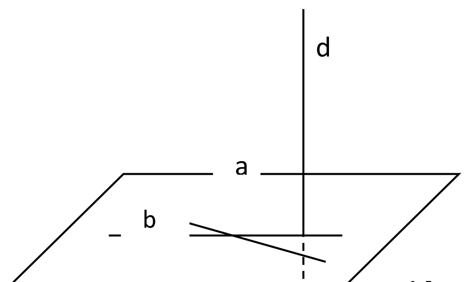


$$d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (\alpha)$$

II. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định lí: *nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.*

$$\begin{cases} d \perp a \\ a \subset (\alpha) \\ d \perp b \\ b \subset (\alpha) \\ a \text{ cat b} \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha)$$



Ví dụ 1: Chứng minh nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh còn lại.

Giải

Giả sử: $\begin{cases} d \perp AB \subset (ABC) \\ d \perp AC \subset (ABC) \end{cases}$

và AB cắt AC $\Rightarrow d \perp (ABC)$ **mà** $BC \subset (ABC) \Rightarrow d \perp BC$

Hệ quả : *Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba của tam giác đó.*

III. Tính chất

Tính chất 1.

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với đường thẳng cho trước.

Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng: *Mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.*

Tính chất 2.

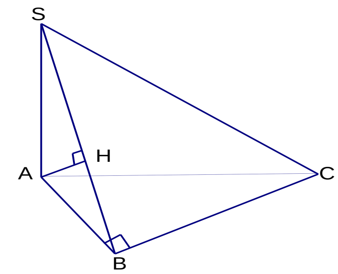
Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông tại B và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC).

a/ Chứng minh $BC \perp (SAB)$

b/ Gọi AH là đường cao của tam giác SAB. Chứng minh $AH \perp SC$

Giải:



a/ Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp (BC)$

ta có $BC \perp SA,\ BC \perp AB.$

từ đó suy ra $BC \perp (SAB)$.

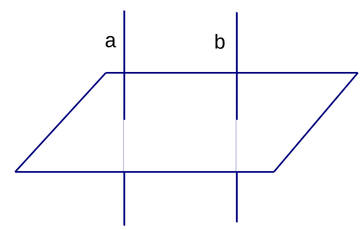
b/ Vì $BC \perp (SAB)$ và AH nằm trong (SAB) nên

$BC \perp AH$. Ta lại có $AH \perp BC,\ AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC)$.

Từ đó suy ra $AH \perp SC$.

IV. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng.

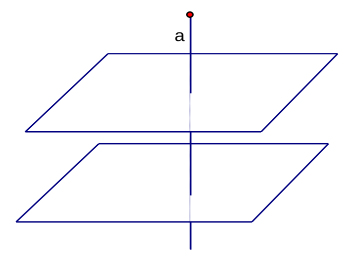
<u>Tính chất 1.</u>



a/ *Cho hai đường thẳng song song, nếu mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.*

b/ *Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau*

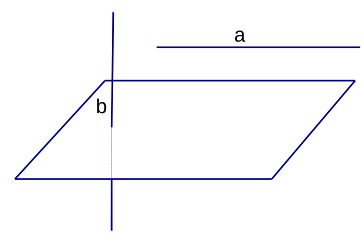
<u>Tính chất 2.</u>



a/ Cho hai mặt phẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

b/ Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

<u>Tính chất 3.</u>



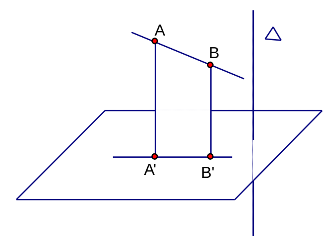
a/ Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. đường thẳng nào vuông góc với mp (α) thì cũng vuông góc với đường thẳng a .

b/ Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

V.Phép chiếu vuông góc và định lí ba đường vuông góc

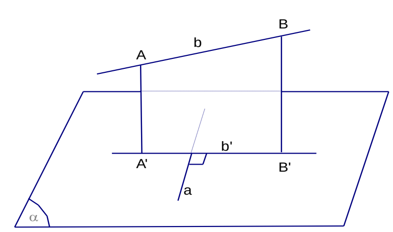
1. Phép chiếu vuông góc.

Cho đường thẳng Δ vuông góc với mp(α). Phép chiếu song song theo phương Δ vuông góc với (α) gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α).



2. Định lí ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α). B là đường thẳng không nằm trong mặt phẳng (α) đồng thời không vuông góc với (α). Gọi b' là hình chiếu của b lên mặt phẳng (α). Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b'.

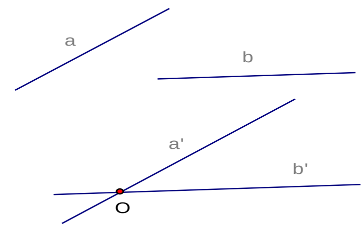


3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa: *Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α).*

Nếu d $\perp(\alpha)$ thì góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng(α)bằng 90^0 .

Góc giữa d và hình chiếu d' củaq nó trên (α) là góc giữa d và (α).



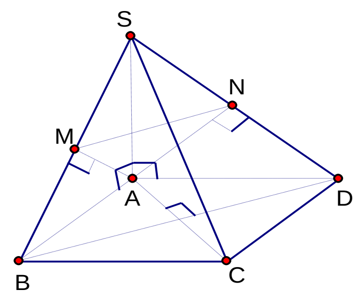
Chú ý : *Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì $0^0 \le \varphi \le 90^0$*

<u>Ví dụ 3</u>. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, có cạnh SA = $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a/ Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD. Tính góc giữa đường thẳng SC và (AMN).

b/ Tính góc giữa đường thẳng SC và (ABCD).

Giải:



a. Ta có

$BC \perp AB, BC \perp AS \Rightarrow BC \perp (ASB)$

$\Rightarrow \mathrm{BC} \perp \mathrm{AM}$

$\mathrm{SB} \perp \mathrm{AM} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Leftrightarrow AM \perp SC$

Tương tự chứng minh $AN \perp SC$

Vậy $SC \perp (AMN)$ do đó góc giữa đường thẳng SC và mp (AMN) bằng 90^0.

b. ta có AC là hình chiếu của SC lên mp (ABCD) nên SCA là góc giữa đt SC và mp (ABCD). Tam giác vuông SAC vuông cân tại A có $\mathrm{AS} = AC = a\sqrt{2}$ do đó $SCA = 45^0$

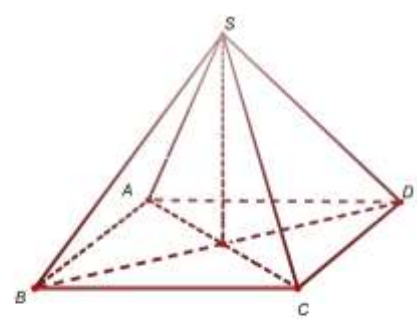
❖ **LUYỆN TẬP**

Bài 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoibvaf có SA=SB=SC=SD. Gọi O là giao điểm của của AC và BC. Chứng minh rằng

a. $\mathrm{SO} \perp (\mathrm{ABCD})$

b. $AC \perp (SBD)$ và $BD \perp (SAC)$

<u>Giải</u>



a). Ta có $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

b). Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$

Ta có $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

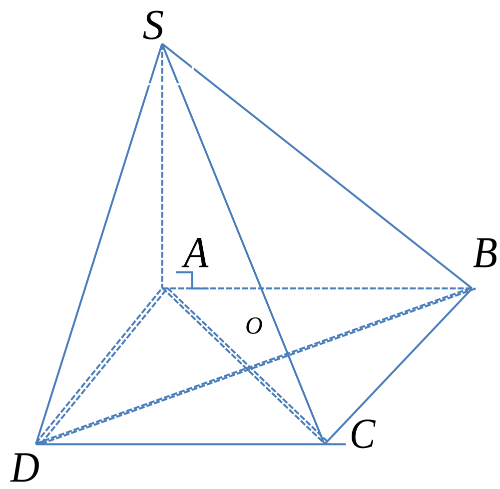
Bài 2: Cho hình chops S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD), SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

a.Chứng minh $BC \perp (SAB)$

b. Chứng minh $\Delta\mathrm{SCD}$ vuông

c. . tính góc giữa Sc và mặt phẳng đáy

Giải



a. **Ta có :**

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA (SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

b) Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CA \perp SA (SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$

Mà $SD \subset (SAD)$ nên $CD \perp SD$

Vậy ΔSCD vuông

c)Vì Ac là hình chiếu của SC lên (ABCD) nê góc giữa SC và mp(ABCD) chính là góc $\angle SAC$

Đặt $\angle SAC$ =α

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$

Trong ΔSAC vuông tại A ta có: $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^0$

BTVN:

Bài 1: : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình v chữ nhật $SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{3}$ AB = a, BC = 2a.

a.Chứng minh $DC \perp (SAD)$, $AC \perp (SDB)$

b. Chứng minh ΔSCD vuông

c. Tính góc giữa Sc và mặt phẳng đáy

d. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A lên SB. Chứng minh $AM \perp SC$

Bài 2: Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD và $BAC = BAD = 60^0$. Chứng minh rằng:

a. $AB \perp CD$;

b. Nếu M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$.