Chương IV: GIỚI HẠN
Bài 1 : GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I.Giới hạn hữu hạn của dãy số

1. Định nghĩa:

Định nghĩa 1 : Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0\ khi\ n \to +\infty$

Quy ước thay cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ta viết tắt $\lim u_n$ và hiểu ngầm $n \to +\infty$.

Ví dụ 1: Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n}$ có giới hạn là 0 hay $\lim u_n = \lim \dfrac{1}{n} = 0$

Ví dụ 2: Cho dãy số (v_n), với $v_n = \dfrac{3n+1}{n}$.Chứng minh rằng, dãy số $u_n = v_n - 3$ có giới hạn là 0.

Giải:

Ta có : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - 3) = \lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{3n+1}{n} - 3) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ (đpcm)

Định nghĩa 2 : Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn là số a (hay v_n dần tới a) khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - a) = 0$. Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ hay $v_n \to a\ khi\ n \to +\infty$

2. Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$, $\forall k \in Z_+$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$

c) Nếu u_n = c (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a = \lim\limits_{n\to+\infty} c = c$

*CHÚ Ý :*Từ nay về sau thay cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, ta viết tắt là lim u_n = a

Ví dụ 3: a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$, b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0, \dfrac{4}{5} < 1$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3$

II. Định lí về giới hạn hữu hạn :

Định lí 1 :

a. Nếu $\lim u_n = a$ **và** $\lim v_n = b$ **thì**

+ $\lim(u_n + v_n) = a + b$ + $\lim(u_n - v_n) = a - b$

+ $\lim(u_n . v_n) = a.b$ + $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b} (b \neq 0)$

b. Nếu $u_n \geq 0$ **với mọi n và** $\lim u_n = a$ **thì** $a \geq 0$ **và** $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$ **.**

Ví dụ 4 : Tìm giới hạn :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2n^2-n+1}{1+n^2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+3n^2}}{1-5n}$

<u>Giải :</u>

a/Chia cả tử và mẫu số n^2 khi đó ta được:

$$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2-n+1}{1+n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+1}=\frac{\lim\left(2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\left(\frac{1}{n^2}+1\right)}=\frac{\lim 2-\lim\frac{1}{n}+\lim\frac{3}{n}}{\lim\frac{1}{n^2}+\lim 1}=\frac{2-0+0}{1+0}=2$$

b/ $$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+3n^2}}{1-5n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+3}}{\frac{1}{n}-5}=\frac{\lim\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}+3}\right)}{\lim\left(\frac{1}{n}-5\right)}=\frac{-\sqrt{3}}{5}$$

<u>III. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.</u>

Định nghĩa: Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q, với $|q|<1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) được kí hiệu là $S=u_1+u_2+u_3+.....+u_n+.....$

$$S=\frac{u_1}{1-q}\;(|q|<1)$$

<u>IV. Giới hạn vô cực</u>

1.Định nghĩa:

Dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n\to+\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu: $\lim u_n=+\infty$ hay $u_n\to+\infty$ khi $n\to+\infty$

Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $-\infty$ khi $n\to+\infty$ nếu $\lim(-u_n)=+\infty$

Kí hiệu: $\lim u_n=-\infty$ hay $u_n\to-\infty$ khi $n\to+\infty$

Nhận xét: $\lim u_n=+\infty\Leftrightarrow\lim(-u_n)=-\infty$

2. Một vài giới hạn đặc biệt:

a)lim $n^k=+\infty$ với k nguyên dương;

b)lim $q^n=+\infty$ nếu q>1.

Ví dụ:a) $\lim n^3=+\infty$ b) $\lim 5^n=+\infty$

3.Định lí:

Định lí 2:

a)Nếu lim u_n = a và lim $v_n=\pm\infty$ thì $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=0$.

b)Nếu lim u_n=a>0, lim v_n=0 và v_n>0 với mọi n thì $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$

c)Nếu lim $u_n=+\infty$ và lim v_n=a>0 thì lim $u_nv_n=+\infty$

Ví dụ 6: Tính a) $\lim\left(n^2-3n+2\right)$ b) $\lim\dfrac{2n+5}{n.3^n}$

Giải :

Ta có : $\lim\left(n^2-3n+2\right)=\lim n^2.\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n}\right)$*(đặt n có số mũ cao nhất làm nhân tử chung)*

$$\lim n^2=+\infty \quad , \quad \lim\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)=1>0$$

Nên $\lim\left(n^2-3n+2\right)=\lim n^2.\left(1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n}\right)=+\infty .1=+\infty$

b) $\lim\frac{2n+5}{n.3^n}=\lim\frac{2+\frac{5}{n}}{3^n}=\frac{\lim(2+\frac{5}{n})}{\lim 3^n}=\frac{2}{+\infty}=0$

❖ **LUYỆN TẬP**

Bài 1 : Tìm các giới hạn sau

a. $\lim\frac{6n-1}{3n+2}$ b. $\lim\frac{3n^2+n-5}{2n^2+1}$ c. $\lim\frac{3^n+5.4^n}{4^n+2^n}$ d. $\lim\frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}$

Giải :

Giới hạn của dãy số $u_n=\frac{f(n)}{g(n)}$ *trong đó f(n) và g(n) là những đa thức ẩn n.*

***Cách giải : Chia cả tử và mẫu cho n có số mũ cao nhất , sau đó áp dụng các công thức tính giới hạn*

a. $\lim\frac{6n-1}{3n+2}=\lim\frac{\left(6-\frac{1}{n}\right)}{\left(3+\frac{2}{n}\right)}=\frac{6-0}{3+0}=2$

b. $\lim\frac{3n^2+n-5}{2n^2+1}=\lim\frac{3+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{3}{2}$

Giới hạn của dãy số $u_n=\frac{f(n)}{g(n)}$ *trong đó f(n) và g(n) là những đa thức ẩn n nằm ở mũ*

***Cách giải : Chia cả tử và mẫu cho lũy thừa có cơ số cao nhất trong dãy số .*

c. $\lim\frac{3^n+5.4^n}{4^n+2^n}=\lim\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+5}{1+\left(\frac{2}{4}\right)^n}=\frac{\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n+\lim 5}{\lim 1+\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{0+5}{1+0}=5$

d) $\lim\frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}=\lim\frac{\sqrt{n^2\left(9-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}{4n-1}=\frac{\lim n\sqrt{9-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\lim(4\mathrm{n}-1)}=\frac{3}{4}$

Bài 2 : Tính các giới hạn sau

a) $\lim(n^3 + 2n^2 - n + 1)$ b) $\lim(-n^2 + 5n - 2)$ c) $\lim(\sqrt{n^2 - n} - n)$

Giải :

a) $\lim(n^3 + 2n^2 - n + 1) = \lim n^3(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}) = +\infty.1 = +\infty$ *(đặt n có số mũ cao nhất làm nhân tử chung)*

b) $\lim(-n^2 + 5n - 2) = \lim n^2(-1 + \frac{5}{n} - \frac{2}{n^2}) = +\infty.(-1) = -\infty$

c) Ta có

$\sqrt{n^2 - n} - n = \frac{(\sqrt{n^2 - n} - n).(\sqrt{n^2 - n} + n)}{\sqrt{n^2 - n} + n} = \frac{-n}{\sqrt{n^2 - n} + n}$ (nhân thêm lượng liên hợp)

$\lim(\sqrt{n^2 - n} - n) = \lim\left(\frac{-n}{\sqrt{n^2 - n} + n}\right) = \lim\left(\frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1}\right) = -1$

BÀI TẬP TỰ LUẬN:

Bài 1:Tìm các giới hạn sau:

$\mathrm{A} = \lim\frac{5n^2 - n}{1 - n^2}$ $\mathrm{B} = \lim\frac{\sqrt{1 + 9n^2}}{3 - 2n}$ $C = \lim\frac{2n^2 - n}{1 - n^3}$

$\mathrm{D} = \lim\frac{-3n^2 + n - 3}{2n^4 + 1}$ $\mathrm{E} = \lim\frac{2^n + 5^n}{3.2^n + 4.5^n}$

Bài 2: Tính các giới hạn sau

$A = \lim(n^4 - 3n^3 + n - 5)$ $B = \lim(-2n^3 + 5n + 1)$

$C = \lim(\sqrt{n^2 - n} - n)$ $\mathrm{D} = \lim\frac{3^n + 2^n}{4^n}$