Bài 5.DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

I/ Định lí về dấu của tam thức bậc hai.

1/ Tam thức bậc hai.

Là biểu thức có dạng: $f(x) = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$

Giá trị x_0 làm cho $f(x_0) = 0$ thì ta nói x_0 là nghiệm của $f(x) = 0$.

Ví dụ 1:Các tam thức bậc hai: f(x) = $x^2 - 5x + 4$

g(x) = $x^2 - 4x + 4$

h(x) = $x^2 - 4x + 5$

Hđ 1: 1) Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 5x + 4$.Tính $f(4), f(2), f(-1), f(0)$ và nhận xét dấu của chúng.

Giải:

f(4) = 0; f(2) = –2 < 0, f(–1) = 10 > 0; f(0) = 4 > 0

Nhận xét:

- y > 0 khi x ∈ (–∞; 1) ∪ (4; +∞), y < 0 khi x ∈ (1; 4)
- Δ < 0 ⇒ f(x) cùng dấu với a
- Δ = 0 ⇒ f(x) cùng dấu với a, trừ $x = -\dfrac{b}{2a}$
- Δ > 0 ⇒ f(x) cùng dấu với a trên khoảng $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ và trái dấu với a trên khoảng $(x_1; x_2)$.

2.Định lí dấu tam thức bậc hai.

Định lí: Cho $f(x) = \mathrm{a}x^2 + bx + c(a \neq 0), \Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta > 0$ thì f(x) cùng dấu với a nếu $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ và trái dấu a nếu $x \in (x_1; x_2)$.
- Nếu $\Delta < 0$ thì f(x) luôn cùng dấu với a.
- Nếu $\Delta = 0$ thì f(x) luôn cùng dấu với a trừ x= $\dfrac{-b}{2a}$.

*****Các bước xét dấu của tam thức bâc hai:*** $f(x) = \mathrm{a}x^2 + bx + c(a \neq 0)$

Bước 1: Xác định hệ số a, b, c và dấu của a

Bước 2: Tính $\Delta = b^2 - 4ac$ và xác định dấu của Δ. Tìm nghiệm của $f(x) = 0$

Bước 3:Lập bảng xét dấu và kết luận dấu của $f(x)$

Bảng xét dấu của tam thức bậc hai:

- $\Delta < 0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	*Cùng dấu a*

$f(x)$ ***cùng dấu với a,*** $\forall x \in R$

- $\Delta = 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		*Cùng dấu a*	*0*	*Cùng dấu a*	

$f(x)$ **cùng dấu với a,** $\forall x \in R \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

- $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		*Cùng dấu a*	*0*	*trái dấu a*	*0*	*Cùng dấu a*	

3/ Áp dụng.

<u>Ví dụ 1</u>:

a/ Xét dấu tam thức: $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$.

$\Delta = 4^2 - 4.2.3 = -8 < 0$

Do $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0, \forall x$

b/ Xét dấu tam thức: $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$

$\Delta = 6^2 - 4.(-2).(-4) = 4 > 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = 2$ *(giải phương trình bậc hai)*

và a = 2 < 0

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	

Vậy $f(x) > 0$ khi $x \in (1;2)$

$f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$

<u>Ví dụ 2</u>: Xét dấu của biểu thức: $f(x) = \left(3x^2 - 10x + 3\right)(4x - 5)$

<u>Giải</u>:

a) $f_1(x) = 3x^2 - 10x + 3$ *(a = 3 > 0)*, có nghiệm : x = 3 ; x = $\frac{1}{3}$

$f_2(x) = 4x - 5$ *(a = 4 > 0)* có nghiệm: x = $\frac{5}{4}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$1/3$		$5/4$		3		$+\infty$
$f_1(x)$		+	0	−	|	−	0	+	
$f_2(x)$		−	|	−	0	+	|	+	
$f(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

Từ bảng xét dấu ta có: $f(x)>0$ trên khoảng $x\in\left(\frac{1}{3};\frac{5}{4}\right)\cup(3;+\infty)$

$f(x)<0$ trên khoảng $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{4};3\right)$

II. Bất phương trình bậc hai một ẩn.

1. Bất phương trình bậc hai.

Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình có dạng $ax^2+bx+c>0(<0;\geq 0;\leq 0)$. Trong đó a, b, c là những số thực đã cho, $a\neq 0$

2.Giải bất phương trình bậc hai.

Cách giải:

- Xét dấu tam thức vế trái của bất phương trình .
- Chọn tập nghiệm thỏa bất phương trình.

Ví dụ 3: Giải các bất phương trình sau:

$a)-x^2+3x-5<0$ $\qquad$ $b)x^2+3x-4\leq 0$

Giải:

a) Ta Có $\Delta=3^2-4.(-1).(-5)=-11<0$,a = -1 < 0 $\Rightarrow f(x)<0,\forall x$

Vậy bất phương trình trên có vô số nghiệm.

b) $x^2+3x-4\leq 0$

Đặt $f(x)=x^2+3x-4$

phương trình $x^2+3x-4=0$ có nghiệm $x_1=1, x_2=-4$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

$f(x)>0$ trên khoảng $x\in(-4;1)$

Vậy nghiệm của bất phương trình trên là : $S=(-4;1)$

Ví dụ 4:Tìm các giá trị của m để phương trình sau có hai nghiệm trái dấu.

$2x^2-(m^2-m+1)x+2m^2-3m-5=0$

Giải:

Ta có $a.c=2(2m^2-3m-5)<0$

$\Leftrightarrow 2m^2-3m-5<0$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $-1<m<\frac{1}{5}$

- **BÀI TẬP VN:**

Bài 1. Xét dấu biểu thức

a) $f(x)=5x^2-3x+1$

b) $g(x)=-2x^2+3x+5$

c) $f(x)=(-x^2-4x+5)(4x-5)$

d) $g(x)=\dfrac{(3x^2-x)(3-x^2)}{4x^2+x-3}$

Bài 2: Giải bất phương trình bậc hai.

a) $4x^2-x+1<0$

b) $-3x^2+x+4\geq 0$

c) $\dfrac{1}{x^2-4}<\dfrac{3}{3x^2+x-4}$