

Bài 3 : CÁC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

1. Định lí cosin

a) **Bài toán :** Trong tam giác ABC cho biết hai cạnh AB, AC và góc A . Hãy tính cạnh BC .

Giải:

Ta có : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Vậy: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$

Nhận xét : $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A}$

b) Định lí cosin

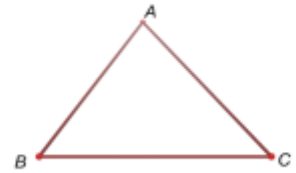
Trong tam giác ABC bất kì với $AC=b, AB=c, BC=a$ thì từ công thức trên ta có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

Hệ quả: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$



Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có cạnh $b=8$, cạnh $c=6$ và góc $A=120^\circ$. Tính độ dài cạnh a .

Giải: Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$$a^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = 196$$

$$\text{Vậy } a = \sqrt{196} = 14.$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có cạnh $a=52,1$, cạnh $b=85$ và cạnh $c=54$. Tính số đo các góc A, B và C .

Giải:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{85^2 + 54^2 - 52,1^2}{2 \cdot 85 \cdot 54} \approx 0,88 \Rightarrow A \approx 28^\circ 21'$$

Các góc B và C học sinh tính tương tự.

2. Định lí sin

a) Định lí sin:

Trong tam giác ABC bất kì với $BC = a, CA = b, AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Ví dụ 3: Cho tam giác đều ABC cạnh a . Hãy tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó:

Giải: $R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{a}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có $B=20^\circ, C=31^\circ$ và cạnh $b=210\text{cm}$. Tính góc A , các cạnh còn lại và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Giải:

$$\text{Ta có: } A = 180^\circ - (20^\circ + 31^\circ) = 129^\circ$$

Theo định lí sin ta suy ra được :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\text{Vậy: } a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{210 \cdot \sin 129^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 477,2(\text{cm})$$

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{210 \cdot \sin 31^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 316,2(\text{cm})$$

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{477,2}{2 \sin 129^\circ} \approx 307,02(\text{cm})$$

3. Công thức tính diện tích tam giác.

Kí hiệu h_a, h_b và h_c là các đường cao của tam giác ABC lần lượt kẻ từ A, B, C. R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và gọi $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác.

Gọi S là diện tích tam giác

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B \\ &= \frac{1}{2} bc \sin A; \quad (2) \end{aligned}$$

$$S = \frac{abc}{4R}; \quad (3)$$

$$S = pr; \quad (4)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \quad (5)$$

4. Giải tam giác và ứng dụng vào đo đạc.

a) Giải tam giác

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC có : $a = 13\text{cm}, b = 14\text{cm}, c = 15\text{cm}$

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải:

a) Ta có $p = \frac{1}{2}(13+14+15) = 21$, theo công thức hê rông ta có:

$$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84m^2$$

b) Bán kính đường tròn nội tiếp $r = \frac{S}{p} = \frac{84}{21} = 4$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp: $R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{336} = 8,125m$

❖ LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho tam giác ABC biết cạnh $a = 52,1 \text{ cm}, b = 85\text{cm}$ và $c = 54\text{cm}$. Tính các góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

Giải:

Áp dụng định lý cosin ta có:

$$+) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \Rightarrow \cos A = \frac{85^2 + 54^2 - 52,1^2}{2 \cdot 85 \cdot 54} = 0,809$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 36^\circ$$

$$+) \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \Rightarrow \cos B = \frac{54^2 + 52,1^2 - 85^2}{2 \cdot 54 \cdot 52,1} = -0,28 \text{ -}0,283$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 106^{\circ}28'$$

$$+) \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Rightarrow \cos C = 0,793$$

$$\Rightarrow \hat{C} = 37^{\circ}32'$$

Bài 2: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^{\circ}$, cạnh $b = 8\text{cm}$, cạnh $c = 5\text{cm}$. Tính cạnh a và các \hat{B} , \hat{C}

Giải:

$$\text{Ta có } a^2 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos A = 129$$

$$\Rightarrow a = 11,36$$

* áp dụng định lí sin ta có:

$$\frac{11,36}{\sin 120^{\circ}} = \frac{8}{\sin B} \Rightarrow \hat{B} = 37^{\circ}48'$$

$$\frac{11,36}{\sin 120^{\circ}} = \frac{5}{\sin C} \Rightarrow \hat{C} = 37^{\circ}32'$$

Bài 3 : Tính diện tích của tam giác có số đo các cạnh lần lượt 7,9 và 12.

Giải :

$$\text{- Ta có } P = \frac{7+9+12}{2} = 14$$

- Diện tích tam giác ABC là :

$$S = \sqrt{14(14-7)(14-9)(14-12)} = 31,3(\text{đvdt})$$

BTVN:

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có $A = 60^{\circ}$, $B = 45^{\circ}$, $b = 2$. Tính độ dài cạnh a , c bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và diện tích tam giác.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3$, $AC = 4$ và diện tích $S = 3\sqrt{3}$. Tính cạnh BC .