

Bài 2 : TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

1. Định nghĩa.

Cho hai vectơ \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của \vec{a}, \vec{b} là một số .kí hiệu: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Chú ý:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

* $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2$, \vec{a}^2 gọi là bình phương vô hướng của vec \vec{a} .

* $\vec{a} \cdot \vec{b}$ âm hay dương phụ thuộc vào $\cos(\vec{a}, \vec{b})$

Ví dụ 1: Cho tam giác đều ABC cạnh a , trọng tâm G.Tính các tích vô hướng sau:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}.$$

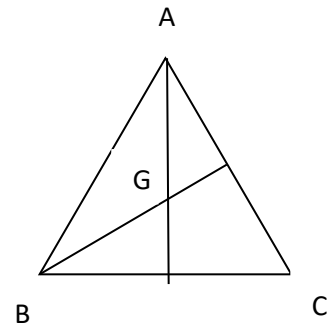
Giải:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ, (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ, (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) = 60^\circ$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} a^2$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} a^2$$

$$\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a \cos 60^\circ = \frac{1}{2} a^2$$



2. Các tính chất của tích vô hướng

Với ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

Nhấn mạnh:

$$(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2), \vec{b} = (b_1; b_2)$, khi đó tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ là: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

Nhận xét: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0$

Ví dụ 2: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm A(2;4), B(1;2); C(6;2). Chứng minh

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$$

Giải:

$$\overrightarrow{AB} = (-1; -2) \quad \overrightarrow{AC} = (4; -2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) = 0. \text{ suy ra } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$$

4. Ứng dụng

a) Độ dài của vectơ

Cho $\vec{a}(a_1; a_2)$, độ dài vectơ \vec{a} theo công thức $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

b) Góc giữa hai véc tơ:

Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2), \vec{b} = (b_1; b_2)$, góc giữa hai véc tơ được tính theo công thức

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

c) Khoảng cách giữa hai điểm

Cho hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ khoảng cách giữa hai điểm A, B được tính theo công thức: $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Ví dụ 3: Cho $M(-2; 2), N(1; 1)$. Tìm khoảng cách giữa hai điểm N và M.

Giải: Cho $M(-2; 2), N(1; 1)$. $\overline{MN} = (3; -1)$

$$|\overline{MN}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

❖ LUYỆN TẬP : TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

Bài 1: Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = a$. Tính các tích vô hướng $\overline{AB} \cdot \overline{AC}, \overline{AC} \cdot \overline{CB}$?

Giải :

Ta có: $\angle A = 90^\circ; \angle B = \angle C = 45^\circ$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{CB} = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 135^\circ = -a^2$$

Bài 2: Cho tam giác ABC với $A(-1; 2), B(2; 1), C(-1; 1)$

a) Tính $\cos(\overline{AB}, \overline{AC})$

b) Tính độ dài của $\overline{AB}, \overline{BC}$

Giải:

a) Ta có : $\overline{AB} = (2 - (-1); 1 - 2) = (3; -1), \overline{AC} = (0; -1)$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 3 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = 2, AC = |\overline{AC}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

$$\text{Vậy } \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

b) $\overline{BC} = (-3; 0)$

$$BC = |\overline{BC}| = \sqrt{(-3)^2 + 0} = 3$$

BTVN: Cho 3 điểm $M(3; 2), N(-2; 1), P(2; -1)$. Tính $\cos(\overline{MN}, \overline{MP})$ và độ dài của $\overline{NM}, \overline{NP}$