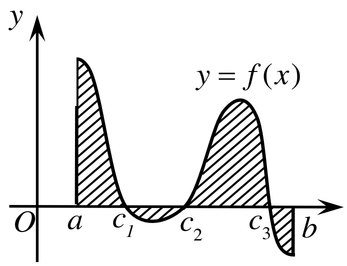
Bài 3: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

I.Tính diện tích hình phẳng.

1.Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x)|dx$

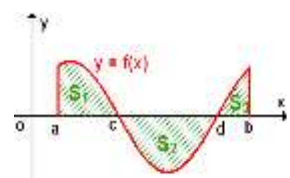


$$(H)\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{\boldsymbol{S = \int_a^b |f(x)|dx}}$$

Chú ý:

- *Nếu trên [a; b] hàm số f(x) giữ nguyên một dấu thì:* $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$
- *Nếu trên khoảng (a; b) phương trình f(x) = 0 có nghiệm c, d thì*

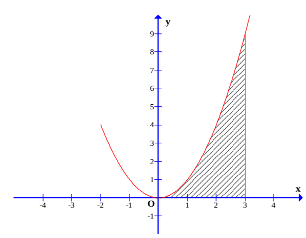
$$S = \int_a^b |f(x)|dx = S_1 + S_2 + S_3$$
$$= \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^d |f(x)|dx + \int_d^b |f(x)|dx \qquad = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$



Ví dụ 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x^2$, x = 0, x = 3, trục Ox.

Giải :

$$(H) = \begin{cases} f(x) = x^2 \\ y = 0 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

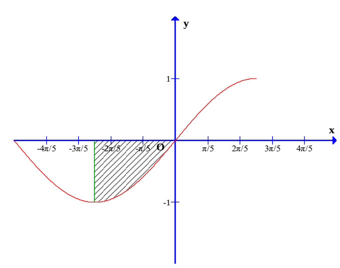


$$S = \int_a^b |f(x)|dx = \int_0^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = \frac{3^3}{3} - 0 = 9 \text{ (đvdt)}$$

Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:y = sinx, $x = -\frac{\pi}{2}$, x = 0, y = 0.

Giải :

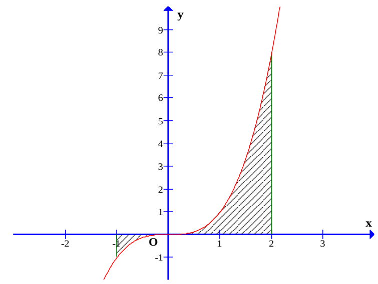
$$(H) = \begin{cases} f(x) = \sin x \\ y = 0 \\ x = -\frac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$



$$S=\int_a^b |f(x)|dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin x)dx=\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}= \ 1 \text{ (đvdt)}$$

Vd3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:$y = x^3$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

$$(H)=\begin{cases} f(x)=x^3 \\ y=0 \\ x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

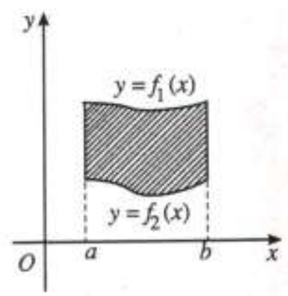


Ta có $x^3=0 \Leftrightarrow x=0\in[-1;2]$. Vậy diện tích hình phẳng cần tìm

là $S=\int_a^b |f(x)|dx=\int_{-1}^{2}|x^3|dx=\int_{-1}^{0}(-x^3)dx+\int_0^2 x^3dx=\dfrac{17}{4}$ (đvdt)

2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được xác định: $S=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|dx$



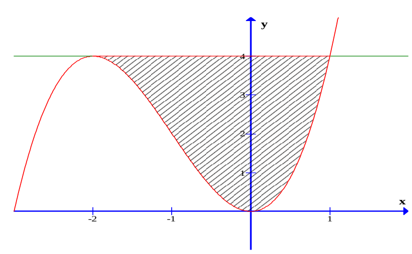
$$(H)=\begin{cases} y=f_1(x) \\ y=f_2(x) \\ x=a \\ x=b \end{cases} \qquad S=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|dx$$

- ***Chú ý***: *Nếu trên đoạn [α; β] biểu thức $f_1(x) - f_2(x)$ không đổi dấu thì:*

$$\int_\alpha^\beta |f_1(x)-f_2(x)|dx=\left|\int_\alpha^\beta [f_1(x)-f_2(x)]dx\right|$$

Ví dụ 4:Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=f(x)=x^3+3x^2$, $y=g(x)=4$.

Giải:



Ta có: $f(x)-g(x)=x^3+3x^2-4$

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đường

$f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow x^3+3x^2-4=0$ có nghiệm $x = -2$, $x = 1$

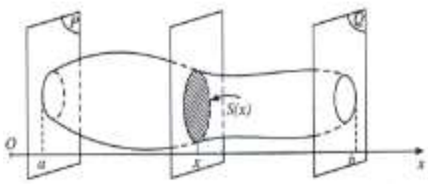
Do đó: $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx = \int_{-2}^{1} |x^3 + 3x^2 - 4|dx = \left|\int_{-2}^{1} (x^3 + 3x^2 - 4)dx\right|$

$$= \left|\left.\left(\frac{x^4}{4} + x^3 - 4x\right)\right|_{-2}^{1}\right| = \left|\left(\frac{1}{4} + 1 - 4.1\right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} + (-2^3) - 4.(-2)\right)\right| = \frac{27}{4} \text{ đvtt}$$

<u>II. Tính thể tích.</u>

<u>1.Thể tích của vật thể.</u>

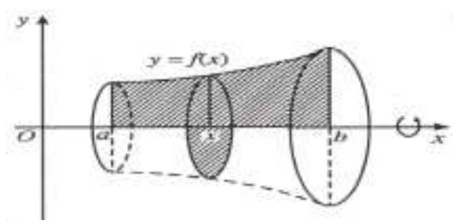
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục *Ox* tại các điểm *a* và *b*; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục *Ox* tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.



Khi đó, thể tích của vật thể *B* được xác định: $V = \int_a^b S(x)dx$

Ví dụ 5: Cho một hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của các hàm số *y=f(x), trục Ox và hai đường thẳng x=a ;x=b* **(**a<b) quay quanh trục Ox tạo thành vật thể khối tròn xoay. Hãy tính thể tích V của nó.

Giải:



Vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng *x=a ;x=b* có thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x \in [a;b]$ là hình tròn có $R = f(x)$.

Vậy thể tích khối tròn xoay là:

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \pi.\left[f(x)\right]^2 dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Kết luận: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục *Ox* có công thức:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Ví dụ 6: Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong y = sinx, trục Ox, x = 0, x = π. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình này xung quanh trục Ox.

Giải:

Áp dụng công thức thể tích khối tròn xoay ta có :

$$V = \pi\int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)dx = \frac{\pi}{2}\left.\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\right|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

Ví dụ 7: Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục *Ox*: $y = 1 - x^2, y = 0$

Giải:

Phương trình hđgđ của đồ thị hai hàm số: $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Do đó *(H)* chính là hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = -1$, $x = 1$, $y = 1 - x^2, y = 0$

Áp dụng công thức tính thể tích tròn xoay , ta được:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - 2x^2 + x^4\right) dx = \frac{16\pi}{15}.$$

❖ LUYỆN TẬP ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

<u>Các công thức cần nắm</u>:

1.Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành.

$$(H): \begin{cases} x = a \\ x = b \\ y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow S = \int_a^b \left| f(x) \right| dx \quad (1)$$

2. Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong.

$$(H): \begin{cases} x = a \\ x = b \\ y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \quad => S = \int_a^b \left| f_1(x) - f_2(x) \right| dx$$

Phương pháp giải toán

+) Giải phương trình $f(x) = g(x)$ (1)

+) Nếu (1) vô nghiệm thì $S = \left| \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx \right|$.

+) Nếu (1) có nghiệm thuộc .$[a;b]$. giả sử a thì $S = \left| \int_a^a \left(f(x) - g(x) \right) dx \right| + \left| \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx \right|$

3.Thể tích khối tròn xoay khi quay quanh trục hoành

$$(H): \begin{cases} x = a \\ x = b \\ y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \quad (a < b) \Rightarrow V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

- **BÀI TẬP**

Bài 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường.

a) $y = x^2,\ y = x + 2$ b) $y = \left| \ln x \right|,\ y = 1$ c) $y = (x-6)^2,\ y = 6x - x^2$

Giải:

a)Hoành độ giao điểm là: $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

- Diện tích của hình phẳng là: $S = \int_{-1}^{2} \left|x^2 - x - 2\right| dx = \left|\int_{-1}^{2}\left(x^2 - x - 2\right)dx\right| = \frac{9}{2}$ (đvdt)

b) - Hoành độ giao điểm là $\left|ln\,x\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ln\,x = -1 \\ lnx = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = e^{-1} \\ x = e \end{array}\right.$

- Diện tích của hình phẳng là: $S = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left|\left|ln\,x\right| - 1\right| dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(1 + ln\,x\right)dx + \int_{1}^{e}\left(1 - lnx\right)dx = \frac{1}{e} + e - 2$

c) Tự giải

Bài 2:Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2 + 1$, tiếp tuyến với đường này tại điểm M(2;5)và trục Oy.

Giải:

-Tiếp tuyến của đường cong tại điểm M(2;5) là: $y = y'(2)(x-2) + 5 \Leftrightarrow y = 4x - 3$

- Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong $y = x^2 + 1$ và đường thẳng $y = 4x - 3$ *là:* $x^2 + 1 = 4x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

- Diện tích của hình phẳng là: $S = \int_0^2 (x-2)^2\,dx = \left.\frac{(x-2)^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3}$

Bài 3: Tính thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục Ox: a) $y = 1 - x^2,\ y = 0$ b) $y = \cos x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi$ c) $y = \tan x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$

Giải:

a) - Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng: $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

-Thể tích của khối tròn xoay là $V = \pi\int_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right)^2 dx = \pi\left.\left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right)\right|_{-1}^{1} = \frac{16}{15}\pi$

b)Thể tích của khối tròn xoay là $V = \pi\int_0^{\pi} cos^2 x dx = \pi\int_0^{\pi}\frac{1 + cos2x}{2}dx = \frac{\pi^2}{2}$

c) Tự giải

❖ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 3$là :

A. $\frac{28}{9}\left(dvdt\right)$. **B.** $\frac{28}{3}\left(dvdt\right)$. **C.** $\frac{1}{3}\left(dvdt\right)$. **D.**Tất cả đều sai.

Câu 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^3,\ y = 4x$ là:

A. 8 B. 9 C. 12 D. 13

Câu 3. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f_1(x), y=f_2(x)$ liên tục và hai đường thẳng $x=a, x=b (a<b)$ được tính theo công thức:

A. $S=\int_a^b \left|f_1(x)-f_2(x)\right|\mathrm{dx}$.

B. $S=\left|\int_a^b f_1(x)-f_2(x)\mathrm{dx}\right|$.

C. $S=\int_a^b \left[f_1(x)-f_2(x)\right]\mathrm{dx}$.

D. $S=\int_a^b f_1(x)\mathrm{dx}-\int_a^b f_2(x)\mathrm{dx}$.

Câu 4. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $(C): y=x^2+2x; y-x-2=0$.

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{7}{2}$ **C.** $\frac{9}{2}$ **D.** $\frac{11}{2}$

Câu 5: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi parabol $y=2-x^2$ và đường thẳng $y=-x$ là

A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{9}{4}$ C. 3 D. $\frac{9}{2}$

Câu 6:Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x\ln x$, trục hoành và đường thẳng $x=e$ là

A. $\frac{e^2-1}{2}$ B. $\frac{e^2+1}{2}$ C. $\frac{e^2-1}{4}$ D. $\frac{e^2+1}{4}$

Câu 7: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=p$, $x=\frac{3p}{2}$ là

A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. $\frac{3}{2}$

Câu 8: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $\mathrm{y}=\cos 4\mathrm{x}$, Ox, x = 0, x = $\frac{\pi}{8}$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $\frac{\pi^2}{2}$ B. $\frac{\pi^2}{16}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\left(\frac{\pi+1}{16}\right).\pi$

Câu 9: Thể tích hình phẳng giới hạn bởi $y=(x-2)^2, y=0$,x=0, x=2 khi xoay quanh trục hoành là.

A. $V=\frac{32}{5}$ **B.** $V=32\pi$ **C.** $V=\frac{32}{5}.\pi$ **D. 32**

Câu 10: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x-1}$; trục *Ox* và đường thẳng $x=3$ quay xung quanh trục *Ox*. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $\frac{3}{2}\pi$ B. 3π C. 2π D. π

(Các bạn giải bài tập trắc nghiệm cụ thể , sau đó chọn đáp án)