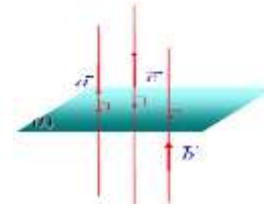
§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

I. <u>Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng:</u>.

<u>1. Định nghĩa</u>: Cho mặt phẳng (α). Nếu vector $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) thì $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của (α).

** Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm thuộc nó và một vectơ pháp tuyến của nó.*



Chú ý: Nếu vectơ $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì vectơ k$\vec{n}$ cũng là vectơ pháp tuyến của (α).

Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng (α) có hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\ \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ không cùng phương có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng (α). Khi đó mp (α) có VTPT là $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$

Vectơ $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$ được gọi là tích có hướng của hai vectơ và có công thức

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{n}=\vec{a}\Lambda\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_2\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)\\ Hay\ \vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_2b_3;a_1b_2-a_2b_1)\end{array}}$$

<u>Ví dụ 1</u> : Trong không gian tọa độ Oxyz cho ba điểm không thẳng hàng A(2; 1; 0), B(1; 2; -1), C(3; 4; 1).Tìm các cặp VTCP của mp(ABC) từ đó suy ra VTPT của mặt phẳng .

<u>Giải</u>:

a) $\overrightarrow{AB}=(-1;1;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;3;1)$

=> VTPT $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(1.1-(-3).1;(-1).1-(-1).1;(-1).3-1.1\right)=(4;0;-4)$

<u>Ví dụ 2</u>:Xác định một VTPT của các mặt phẳng (Oxy), (Oyz)?

a) Mặt phẳng (Oxy).

b) Mặt phẳng (Oyz).

<u>Giải</u>: $\overrightarrow{n_1}=(0;0;1),\overrightarrow{n_2}=(1;0;0)$

<u>II. Phương trình tổng quát của mặt phẳng:</u>

Điều kiện cần và đủ để điểm M(x; y; z) thuộc mp (α) là :

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0$ (Với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$)

+ Phương trình Ax + By + Cz + D = 0 là một mặt phẳng nhận vectơ $\vec{n}$= (A; B; C) làm vectơ pháp tuyến của mp.

<u>1. Định nghĩa:</u>

"Phương trình có dạng Ax + By + Cz + D = 0, (1) trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng."

*** <u>Nhận xét</u>:**

a) Nếu (α) có pt : Ax + By + Cz + D = 0 thì $\vec{n}=(A;B;C)$ là một véctơ pháp tuyến của nó .

b) Nếu mp(α) đi qua điểm $M_0(x_0\ ;\ y_0\ ;z_0)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ thì phương trình của nó có dạng : $\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$

Ví dụ 3. Hãy lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm M (4; 3;- 2) và có VTPT $\vec{n}=(1;-2;1)$

Giải:

Mặt phẳng (MNP) đi qua điểm M (4;3;2) và nhận $\vec{n}=(1;-2;1)$ làm VTPT có phương trình là:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Leftrightarrow 1(x-4)-2(y-3)+(z+2)=0$$

$$\Leftrightarrow x-4-2y+6+z+2=0$$

$$\Leftrightarrow x-2y+z+4=0$$

Ví dụ 4. Hãy lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (MNP) với M(1; 1; 1), N(4; 3; 2), P(5; 2; 1).

Giải:

Ta có: $\overrightarrow{MN}=(3;2;1),\overrightarrow{MP}=(4;1;0)$

$$\vec{n}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=(2.0-1.1;1.4-3.0;3.1-2.4)=(-1;4;-5)$$

Mặt phẳng (MNP) đi qua điểm M (1;1;1) và nhận $\vec{n}=(-1;4;-5)$ làm VTPT có phương trình là:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

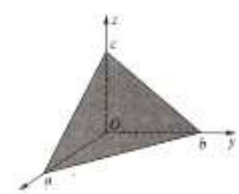
$$\Leftrightarrow -1(x-1)+4(y-1)-5(z-1)=0$$

$$\Leftrightarrow -x+1+4y-4-5z+5=0$$

$$\Leftrightarrow -x+4y-5z+2=0$$

2. <u>Các trường hợp riêng</u>: SGK

Chú ý:(P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A(a; 0; 0),B(0; b; 0), C(0; 0; c) có phương trình dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$***(phương trình của mặt phẳng theo đoạn chắn)***



Ví dụ 6: Trong không gian Oxyz cho điểm M(15;5;10) . Viết phương trình mp (α) đi qua các hình chiếu của M trên các trục tọa độ.

<u>Giải:</u>

Hình chiếu của M trên các trục toạ độ Ox, Oy, Oz lần lượt có toạ độ là các điểm (15; 0; 0) ; (0; 5; 0) ; (0; 0; 10)

Vậy mp cần tìm có phương trình là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\Leftrightarrow\frac{x}{15}+\frac{y}{5}+\frac{z}{10}=1$

<u>III. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc:</u>

<u>1. Điều kiện để hai mặt phẳng song song:</u>

Trong (Oxyz) cho2 mp (α_1)và (α_2) : (α_1): $A_1x + B_1y+C_1z+D_1=0$ và (α_2):$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

Khi đó (α_1)và (α_2) có 2 vectơ pháp tuyến lần lượt là: $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ và $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$

$$(\alpha) \parallel (\alpha') \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2} \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

(α) cắt (α') $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \neq k\overrightarrow{n_2}$

Ví dụ 7: Viết phương trình mặt phẳng (α)đi qua M(1; -2; 3) và song song với mặt phẳng (β): 2x – 3y + z + 5 = 0

Giải :

Vì (α) song song (β) với nên (α) có vtpt $\overrightarrow{n_\beta} = \overrightarrow{n_\alpha} = (2;-3;1)$

Mặt phẳng (α) đi qua M(1; -2; 3),vậy (α) có phương trình: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)-3(y+1)+1(z-2)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x-3y+z-7=0$$

IV. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Định lí : "Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (α) có phương trình : Ax + By + Cz + D = 0 và điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$. Khoảng cách từ đểm M_0 đến mp(α) kí hiệu là d(M_0 , (α)), được tính bởi công thức

$$\boxed{d(M_0,(\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

Ví dụ 8: a.Tính khoảng cách từ gốc toạ độ và từ điểm M(2;4;-3) đến mp(α):2x - y +2 z - 9 = 0.

b.Tính khoảng cách giữa hai mp song song(α) và (β) biết: (α): x + 2y - 3z + 1= 0 và (β): x + 2y - 3z - 7 = 0.

Giải:

a.

$$d(M_0,(\alpha)) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|2.2-1.4+2.(-3)-9|}{\sqrt{2^2+1+(-2)^2}} = 5$$

b) Lấy M(4;0;-1) $\in (\beta)$.

Khi đó: d((α),(β)) =d(M,(α)) $= \frac{|1.4+2.0-3(-1)+1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$