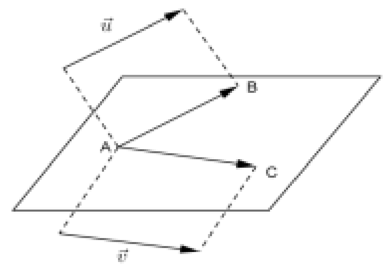
Bài 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

I. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian.
1. Góc giữa hai véc tơ trong không gian.

Định nghĩa. Trong không gian, cho $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$, lấy điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho: $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ khi đó ta gọi góc BAC $(0\leq BAC\leq 180^0)$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu là $(\vec{u},\vec{v})$.



Nhận xét:

- Góc giữa hai vectơ cùng hướng bằng 0
- Góc giữa hai vec tơ vuông góc bằng 90^0
- Góc giữa hai vec tơ ngược hướng bằng 180^0

Chú ý: $0^0\leq\left(\vec{u},\vec{v}\right)\leq 180^0$.

2. Tích vô hướng của hai véc tơ trong không gian.

Định nghĩa. Trong không gian cho hai vectơ $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u}.\vec{v}$, được xác định bởi công thức: $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

Chú ý: +Nếu $\vec{u}=\vec{0},\vec{v}=\vec{0},\ :\ \vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$

+ $\vec{u}\perp\vec{v}\ \Leftrightarrow\ \vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$

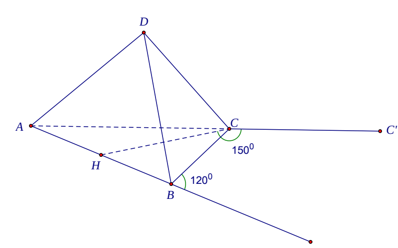
+ Biểu thức độ dài của một vectơ $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}^2}$

+ Tính góc giữa hai vectơ: $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$.

Ví dụ 1: Cho tứ diện đều ABCD có H là trung điểm của cạnh AB. Hãy tính . $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{HC}$

Giải:

Ta có: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\angle BAC=60^0$



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.COS\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a.a.\cos 60^0=a^2.\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$$

Ta vẽ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB'}$

khi đó $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{BC}\right)=\angle B'\mathrm{BC}=120^0$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.COS\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=a.a.\cos 120^0=a^2.(-\frac{1}{2})=-\frac{a^2}{2}$$

Ta vẽ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{\mathrm{CC'}}$

Khi đó $\left(\overrightarrow{CH},\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{CH},\overrightarrow{CC'}\right)=\angle C'\text{CH}=150^0$

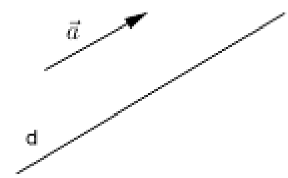
$$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{CH}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.COS\left(\overrightarrow{CH},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}.a.\cos 150^0$$

$$=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{3a^2}{4}$$

II. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng.

1.Định nghĩa:

Vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$ được gọi là VTCP của đường thẳng d nếu giá của vectơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d.



2. Nhận xét

a) Nếu $\vec{a}$ là VTCP của d thì $k.\vec{a}$ cũng là VTCP của d $(k\neq 0)$.

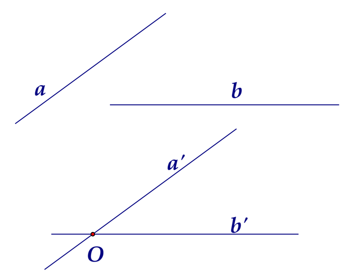
b) Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn có thể xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một VTCP $\vec{a}$ của nó.

c) Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi là hai đường thẳng phân biệt và có hai VTCP cùng phương.

III. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

1.Định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng a,b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a',b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a,b.



2. Nhận xét:

a. Điểm O có thể nằm trên đường thẳng a hoặc b.

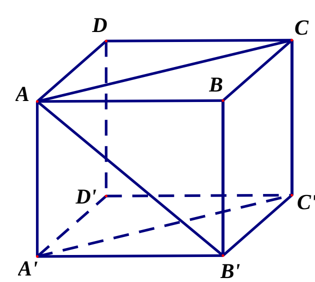
b. Nếu $\vec{u},\vec{v}$ lần lượt là hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a,b:

- Nếu $\left(\vec{u},\vec{v}\right)\leq 90^0$ thì góc giữa hai đường thẳng bằng góc $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.
- Nếu $\left(\vec{u},\vec{v}\right)>90^0$ thì góc giữa hai đường thẳng bằng $180^0-\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

Ví dụ 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa các cặp đường thẳng

a) AB và $B'C'$ b) AC và $B'C'$ c) $A'C'$ và $B'C$

Giải:



a) Ta có: $A'B'//AB$ mà $\left(A'B',B'C'\right)=90^0$ nên $\left(AB,B'C'\right)=90^0$

b) Vì tứ giác ABCD là hình vuông nên $\left(AC,BC\right)=45^0$. Do $B'C'//BC$, nên $\left(AC,B'C'\right)=45^0$

c) Ta có: $A'C'//AC$ và $\Delta ACB'$ là tam giác đều vì có các cạnh đều bằng đường chéo của các hình vuông bằng nhau. Do đó:

$\left(A'C',B'C\right)=\left(AC,B'C\right)=60^0$

IV. Hai đường thẳng vuông góc.

1.Định nghĩa:

Hai đường thẳng được gọi là vuông góc nếu góc giữa chúng bằng 90^0.Kí hiệu: $a\perp b$

2. Nhận xét:

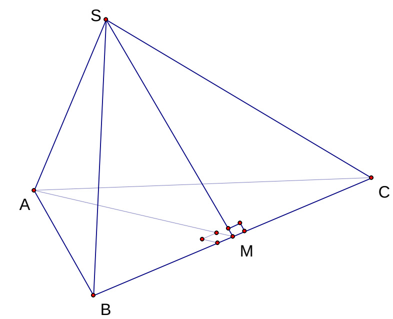
a. $a\perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$ trong đó $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt là hai VTCP của hai đường thẳng a,b.

b. $\begin{cases} a\ //\ a' \\ b\perp a \end{cases} \Rightarrow b\perp a'$

c. Hai đường thẳng vuông góc với nhau thì có thể cắt nhau hoặc không cắt nhau

Ví dụ 3. Cho hình chóp *S.ABC*, tam giác *ABC* và *SBC* cân có chung đáy *BC*. Chứng minh rằng hai đường thẳng *SA* và *BC* vuông góc.

Giải:



Gọi *M* là trung điểm của *BC*

Vì tam giác *ABC* và *SBC* cân đáy *BC* nên *AM* và *SM* vuông góc với *BC*.

Ta có : $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MS}\right).\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MS}.\overrightarrow{BC}=0$

(vì $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{BC},\overrightarrow{MS}\perp\overrightarrow{BC}$)

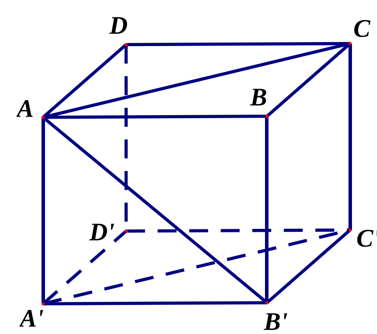
Suy ra $SA\perp BC$.

❖ **LUYỆN TẬP**

Bài 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy xác định goc giữa các cặp vectơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ b) $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DD'}$

Giải:



a)Ta có : $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C'}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

Vậy $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C'}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=45^0$ (vì ABCD là hình vuông nên góc $\angle BAC=45^0$)

b)Ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{A'C'}\right)=\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AC}\right)$

Do AC, AB’ và B’C là các đường chéo của hình vuông có đọ dài cạnh bằng nhau nên AC= AB’=B’C

Vây ΔAB’C là tam giác đều nên $\angle B'AC=60^0$

Suy ra $\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{A'C'}\right)=60^0$

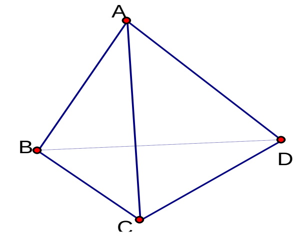
c)Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DD'}\right)=\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD'}\right)=90^0$

Bài 2: Cho tứ diện ABCD

a. CMR: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$

b. Từ đẳng thức trên suy ra rằng nếu tứ diện ABCD có $AB\perp CD, AC\perp DB$ thì $AD\perp BC$

Giải:



a) Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\overrightarrow{AB}$

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$

b) Vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$

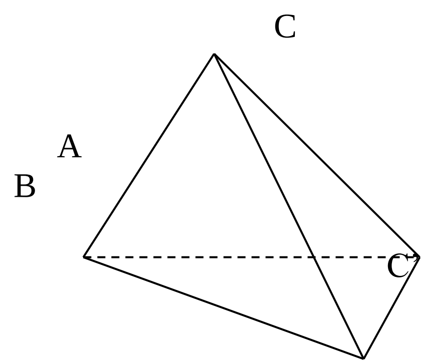
$\Rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow AD\perp BC$

Bài 3: Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC’ có cạnh chung là AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N , P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AC, CB, BC’, C’A. CMR:

a. $AB\perp CC'$

b. Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

Giải:



a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

Vậy AB ⊥ CC’

b). Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Vậy MNPQ là hình bình hành.

Mặt khác do AB ⊥ CC’ nên

MN ⊥MQ

Vậy MNPQ là hình chữ nhật.

- **BT TỰ LUẬN:**

Bài 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$.

Bài 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và $ASB=BSC=CSA$.

Chứng minh $SC\perp AB$.

Bài 3 :Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Chứng minh $IE\perp JF$.