ĐÁP ÁN ĐỀ SỐ 24

I. NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 1. Từ các số $1,2,3,4,5,6$ lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm có 4 chữ số đôi một khác nhau ?

A. C_6^4 **B.** A_6^4 **C.** P_4 **D.** 4^6

Câu 2. Trong một lớp học gồm 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi đó có cả nam và nữ?

A. $\dfrac{219}{323}$. **B.** $\dfrac{219}{323}$. **C.** $\dfrac{442}{506}$. **D.** $\dfrac{443}{506}$.

Gọi A là biến cố "4 học sinh được gọi có cả nam và nữ", suy ra $\overline{A}$ là biến cố "4 học sinh được gọi toàn là nam hoặc toàn là nữ"

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{25}^4=12650$.

Ta có $n(\overline{A})=C_{15}^4+C_{10}^4=1575 \Rightarrow P(\overline{A})=\dfrac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\dfrac{63}{506}$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{63}{506}=\dfrac{443}{506}$.

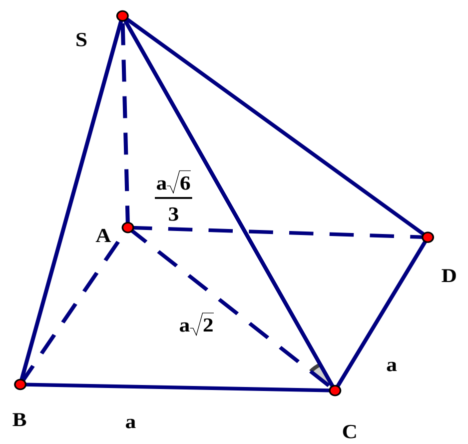
Câu 3. Phát biểu nào sau đây là **sai** ?

A. $\lim u_n=c$ (với $u_n=c$ là hằng số). **B.** $\lim q^n=0$ $(|q|>1)$.

C. $\lim n^k=+\infty,(k\in\mathbb{N}^*)$. **D.** $\lim\dfrac{c}{n^k}=0$ với $k\in\mathbb{N}^*$ và c là hằng số.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$?

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.



$AC=a\sqrt{2}$,

AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD)\Rightarrow(SC,(ABCD))=(SC;AC)=SCA$

$\Delta SAC:\tan SCA=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}:(a\sqrt{2})=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow SCA=30°$.

Câu 5. Các khoảng đồng biến của hàm số $y = x^4 - 8x^2 - 4$ là

A. $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$ **B.** $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$

C. $(-2;0)$ và $(0;2)$ **D.** $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 - 16x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-20	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-20	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 5

Câu 7. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^4 + 8x^2 - 2$ trên đoạn $[-3;1]$. Tính $M + m$?

A. -48. **B.** -6. **C.** 3. **D.** -25.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -4x^3 + 16x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-3;1] \\ x = 2 \notin [-3;1] \\ x = -2 \in [-3;1] \end{array}\right.$.

$y(-3) = -11$; $y(1) = 5$; $y(-2) = 14$; $y(0) = -2$.

Suy ra $\max\limits_{[-3;1]} y = 14$; $\min\limits_{[-3;1]} y = -11$.

Vậy $M + m = 14 - 11 = 3$.

Câu 8. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ có phương trình là

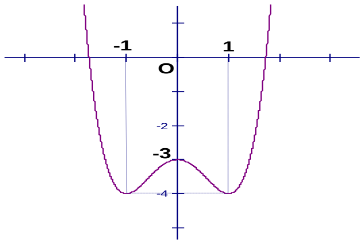
A. $y = -2$ **B.** $x = 2$ **C.** $x = 1$ **D.** $y = 2$

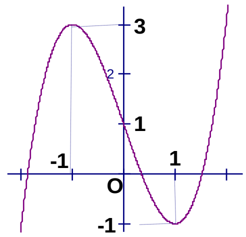
Lời giải

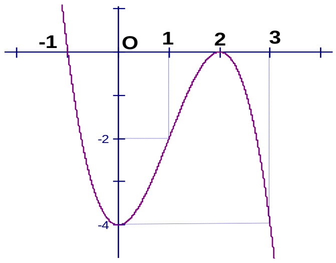
Chọn D

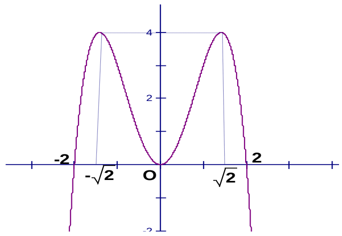
Ta có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x-3}{x-1} = 2 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 9. Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ là đồ thị nào trong các đồ thị sau?

A. 

B. 

C. 

D. 

Lời giải

Chọn A

Vì $y=x^4-2x^2-3$ là hàm bậc 4 nên loại **B**, **C**

Vì $a=1>0$ nên loại **D**

Câu 10. Số giao điểm của đường thẳng $y=x+2$ và đường cong $y=x^3+2$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Phương trình hoành độ giao điểm đường thẳng $y=x+2$ và đường cong $y=x^3+2$ là:

$$x+2=x^3+2 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right. .$$

Vậy số giao điểm của đường thẳng $y=x+2$ và đường cong $y=x^3+2$ là 3.

Câu 11. Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{4}}.\sqrt[8]{x}$ (với $x>0$).

A. x^4. **B.** $x^{\frac{1}{32}}$. **C.** $x^{\frac{3}{16}}$. **D.** $x^{\frac{3}{8}}$.

Lời giải

Ta có: $P=x^{\frac{1}{4}}.\sqrt[8]{x}=x^{\frac{1}{4}}.x^{\frac{1}{8}}=x^{\frac{3}{8}}$.

Câu 12. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{1}{5}}$.

A. $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$ **B.** $D=(-\infty;+\infty)$ **C.** $D=(-\infty;+\infty)\setminus\{1,2\}$ **D.** $D=[1;2]$

Lời giải

Chọn A

Để hàm số xác định thì $x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Câu 13. Cho các số thực dương $a;b$ với $a \neq 1$, khi đó $\log_{a^2}(ab)$ bằng

A. $\frac{1}{2}\log_a b$ **B.** $\frac{1}{2}+\log_a \sqrt{b}$ **C.** $1+\frac{1}{2}\log_a b$ **D.** $\frac{1}{2}+\log_a b$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}\log_a(ab)=\frac{1}{2}(1+\log_a b)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b=\frac{1}{2}+\log_a \sqrt{b}$.

Câu 14. Đạo hàm của hàm số $y=\log(1-x)$ bằng

A. $\frac{1}{(x-1)\ln 10}$. **B.** $\frac{1}{x-1}$. **C.** $\frac{1}{1-x}$. **D.** $\frac{1}{(1-x)\ln 10}$.

Lời giải

Ta có: $y'=\frac{(1-x)'}{(1-x)\ln 10}=\frac{-1}{(1-x)\ln 10}=\frac{1}{(x-1)\ln 10}$.

Câu 15. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)+\log_2(x-2)=\log_5 125$ là

A. $\frac{3+\sqrt{33}}{2}$. **B.** $\frac{3-\sqrt{33}}{2}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{33}$.

Lời giải

Điều kiện: $x>2$

$\log_2(x-1)+\log_2(x-2)=\log_5 125 \Leftrightarrow \log_2(x^2-3x+2)=3$

$\Leftrightarrow x^2-3x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3+\sqrt{33}}{2} \\ x=\frac{3-\sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta thấy nghiệm $x=\frac{3+\sqrt{33}}{2}$ thỏa mãn.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $\frac{3+\sqrt{33}}{2}$.

Câu 16. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2<0$.

A. $S=(-1;1)$. **B.** $S=(-1;0)$. **C.** $S=(-1;1)\backslash\{0\}$. **D.** $S=(0;1)$.

Lời giải

Ta có: $\ln x^2<0 \Leftrightarrow 0<x^2<1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ -1<x<1 \end{cases}$. Vậy $S=(-1;1)\backslash\{0\}$.

Câu 17. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ với mọi hằng số k và với mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $\int f'(x)dx=f(x)+C$ với mọi hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

C. $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$ với mọi hàm số $f(x),g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. $\int[f(x)-g(x)]dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$ với mọi hàm số $f(x),g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 18. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$; biết $F(0)=2$. Tính $F(1)$.

A. $F(1)=\ln 3+2$. **B.** $F(1)=\ln 2+2$. **C.** $F(1)=\ln 2+1$. **D.** $F(1)=\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F(x)=\int\dfrac{1}{x+1}dx=\ln|x+1|+C$

Do $F(0)=2\Rightarrow \ln|0+1|+C=2\Rightarrow C=2$

Vậy $F(x)=\ln|x+1|+2\Rightarrow F(-1)=2$.

Câu 19. Cho tích phân $I=\int\limits_0^1 x(1-x)^5\,\mathrm{d}x$. Thực hiện phép đổi biến $t=1-x$ ta được

A. $I=-\int\limits_{-1}^{0} t^5(1-t)\,\mathrm{d}t$. **B.** $I=-\int\limits_{-1}^{0}\left(t^6-t^5\right)\mathrm{d}t$. **C.** $I=\int\limits_0^1 t^5(1-t)\,\mathrm{d}t$. **D.** $I=-\int\limits_{-1}^{0}\left(t^6-t^5\right)\mathrm{d}t$.

Đặt $t=1-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=-\int\limits_1^0(1-t)t^5\mathrm{d}t=\int\limits_0^1(1-t)t^5\mathrm{d}t$.

Câu 20. Tính tích phân $\int\limits_2^3 x\ln x\,\mathrm{d}x$ ta được kết quả là

A. $\ln 2-\dfrac{3}{4}$. **B.** $2\ln 2-\dfrac{3}{5}$. **C.** $2\ln 2-\dfrac{3}{4}$. **D.** $2\ln 2+\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$.

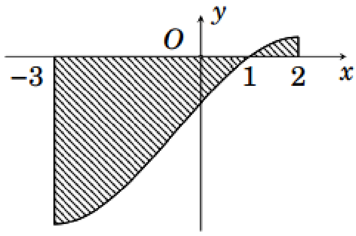
$$\Rightarrow\int\limits_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2-\frac{1}{2}\int\limits_1^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^2-\frac{x^2}{4}\Big|_1^2=2\ln 2-(1-\frac{1}{4})=2\ln 2-\frac{3}{4}.$$

Câu 21. Thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục Ox và các đường thẳng $x=a,x=b,(a<b)$ quay quanh trục Ox được tính theo công thức

.

A. $V=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$

Câu 22. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3$, $x=2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a=\int_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.



A. $S=a+b$. **B.** $S=a-b$. **C.** $S=-a-b$. **D.** $S=b-a$.

Lời giải

Ta có $S=\int_{-3}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-3}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x=-\int_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=-a+b$.

Câu 23. Phần thực của số phức $z=3+4i$ là

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 3

Câu 24. Mô đun của số phức z thỏa mãn $2z-i\bar{z}=2+5i$ là

A. $|z|=7$. **B.** $|z|=5$. **C.** $|z|=25$. **D.** $|z|=\frac{\sqrt{145}}{5}$.

Lời giải

Đặt: $z=a+bi$.

Khi đó: $2z-i\bar{z}=2+5i \Leftrightarrow 2(a+bi)-i(a-bi)=2+5i \Leftrightarrow 2a-b+(2b-a)i=2+5i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a-b=2\\2b-a=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\b=4\end{cases}$$

Do đó: $z=3+4i \Rightarrow |z|=5$.

Câu 25. Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-3z+5=0$. Giá trị của $|z_1.z_2|$ bằng

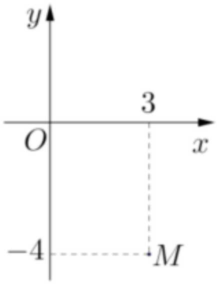
A. 5. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $z^2-3z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i \\ z_2=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i \end{array}\right.$ suy ra $|z_1.z_2|=\left|\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i\right).\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i\right)\right|=5.$

Cách 2: $z_1.z_2=\frac{c}{a}=5 \Rightarrow |z_1.z_2|=5$

Câu 26. Số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ có điểm biểu diễn như hình vẽ bên. Tìm a, b.



A. $a = -4, b = 3$ **B.** $a = 3, b = -4$ **C.** $a = 3, b = 4$ **D.** $a = -4, b = -3$

Lời giải

Dựa vào hình vẽ ta có điểm $M(3; -4) \Rightarrow z = 3 - 4i \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases}$

Câu 27. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|\bar{z} + 2 - i| = 4$ là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là

A. $I(2; -1)$; $R = 4$. **B.** $I(2; -1)$; $R = 2$. **C.** $I(-2; -1)$; $R = 4$. **D.** $I(-2; -1)$; $R = 2$.

Lời giải

Giả sử số phức thỏa mãn bài toán có dạng $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbf{R})$.

Suy ra $\bar{z} + 2 - i = x - yi + 2 - i = x + 2 - (y + 1)i$.

Do đó: $|\bar{z} + 2 - i| = 4 \Leftrightarrow |x + 2 - (y + 1)i| = 4 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-2; -1)$, bán kính $R = 4$.

Câu 28. Trong các khẳng định sau, khẳng định nao sai ?

A. Hình lập phương là hình đa diện. **B.** Hình hộp là hình lăng trụ.

C. Khối nón là khối chóp. **D.** Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng.

Câu 29. Thể tích khối chóp có độ dài đường cao bằng 6, diện tích đáy bằng 8 là

A. 12. **B.** 48. **C.** 16. **D.** 24.

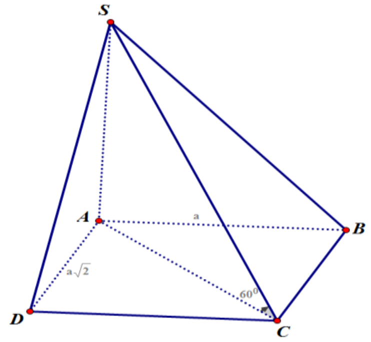
Lời giải

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}.8.6 = 16$.

Câu 30. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa SC và đáy bằng 60°. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $3\sqrt{2}a^3$ **B.** $\sqrt{6}a^3$ **C.** $3a^3$ **D.** $\sqrt{2}a^3$

Lời giải



Theo giả thiết góc giữa SC và đáy bằng 60^0 suy ra $\widehat{SCA} = 60^0$.

$ABCD$ là hình chữ nhật nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.

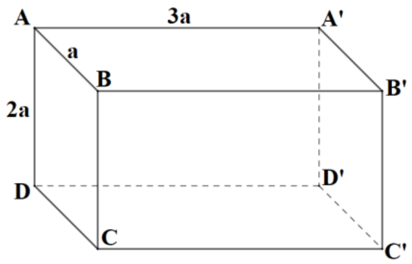
ΔSAC vuông tại A nên $SA = AC.\tan 60^0 = 3a$.

Diện tích đáy là $S_{ABCD} = AB.AD = \sqrt{2}a^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}.\sqrt{2}a^2.3a = \sqrt{2}a^3$

Câu 31. Tính thể tích V của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 3a$.

A. $V = 6a^3$. **B.** $V = 3a^3$. **C.** $V = 2a^3$. **D.** $V = 8a^3$.

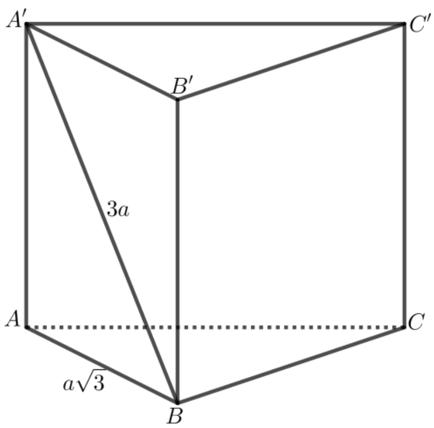


Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là: $V = AB.AD.AA' = a.2a.3a = 6a^3$.

Câu 32. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$, $A'B = 3a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là:

A. $\dfrac{9a^3\sqrt{2}}{4}$ **B.** $\dfrac{7a^3}{2}$ **C.** $6a^3$ **D.** $7a^3$

Lời giải:



Do ΔABC đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$ nên $S_{ABC} = \dfrac{\left(a\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác $A'AB$ vuông tại A nên:

$$A'B^2 = AA'^2 + AB^2 \Leftrightarrow AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{(3a)^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2} = a\sqrt{6}$$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{6}.\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 33. Cho khối nón tròn xoay có chiều cao và bán kính đáy cùng bằng a. Khi đó thể tích khối nón là

A. $\dfrac{4}{3}\pi a^3$. **B.** $\dfrac{2}{3}\pi a^3$. **C.** πa^3. **D.** $\dfrac{1}{3}\pi a^3$.

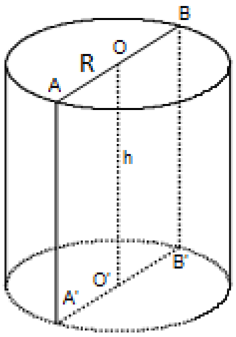
Lời giải

Khối nón có bán kính đáy $R = a$. Diện tích đáy $S = \pi a^2$. Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi a^3$.

Câu 34. Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 16π và thiết diện qua trục của hình trụ này là một hình vuông. Thể tích V

A. $32\sqrt{2}\pi$. **B.** 18π. **C.** 16π. **D.** 24π.

Lời giải



Ta có diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi Rl = 16\pi$

Thiết diện qua trục là một hình vuông nên: $l = 2R = h$

$\Rightarrow S_{xq} = 2\pi Rl = 16\pi = 2\pi.2R^2 \Rightarrow R^2 = 4 \Rightarrow R = 2$

Thể tích khối trụ là: $V = \pi R^2.h = \pi.R^2.2R = \pi.2^2.2.2 = 16\pi$. Chọn C.

Câu 35. Cho mặt cầu có diện tích bằng $36\pi a^2$. Thể tích khối cầu tương ứng là:

A. $18\pi a^3$ **B.** $12\pi a^3$ **C.** $36\pi a^3$ **D.** $9\pi a^3$

Lời giải

Gọi bán kính mặt cầu là R. Vì $S_{mc} = 4\pi R^2 = 36\pi a^2 \Leftrightarrow R = 3a$.

Khi đó thể tích khối cầu là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi.(3a)^3 = 36\pi a^3$.

Câu 36. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a} = (1;2;3); \vec{b} = (2;2;-1); \vec{c} = (4;0;-4)$. Tọa độ của vecto $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là

A. $\vec{d} = (-7;0;-4)$ **B.** $\vec{d} = (-7;0;4)$ **C.** $\vec{d} = (7;0;-4)$ **D.** $\vec{d} = (7;0;4)$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (1-2+2.4; 2-2+2.0; 3+1+2.(-4)) = (7;0;-4)$.

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2+4x-2y-4=0$. Tính bán kính R của (S).

A. 1. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D.

Giả sử phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ $(a^2+b^2+c^2-d>0)$

Ta có: $a=-2, b=1, c=0, d=-4 \Rightarrow$ Bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=3$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;-4;2)$ và $B(1;2;4)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB là

A. $3x-y+3z-25=0$ **B.** $2x-3y-z+8=0$

C. $3x-y+3z-13=0$ **D.** $2x-3y-z-20=0$

Lời giải

Mặt phẳng vuông góc với đường thẳng AB nên nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ pháp tuyến, $\overrightarrow{AB}=(-4;6;2)$

Mặt phẳng đi qua $A(5;-4;2)$ và có vectơ pháp tuyến, $\overrightarrow{AB}=(-4;6;2)$ có phương trình $-4(x-5)+6(y+4)+2(z-2)=0$ hay $2x-3y-z-20=0$. Vậy chọn D.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng chứa trục Ox có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=t \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$.

Trục Ox đi qua $O(0;0;0)$ và nhận $\vec{i}=(1;0;0)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Câu 40. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-3y+z=0$ và $(\beta): x+y-z+4=0$. Phương trình tham số của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z-2-2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=t \\ z=2+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-2+t \\ y=t \\ z=2+2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=t \\ z=-2+2t \end{cases}$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}=(1;-3;1)$.

Mặt phẳng (β) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(\beta)}}=(1;1;-1)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{n_{(\alpha)}}, \overrightarrow{n_{(\beta)}}\right]=(2;2;4)$, một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_d}=(1;1;2)$

Chọn điểm $M(-2;0;2)\in d$ khi đó phương trình tham số của d là: $\begin{cases} x=-2+t \\ y=t \\ z=2+2t \end{cases}$.

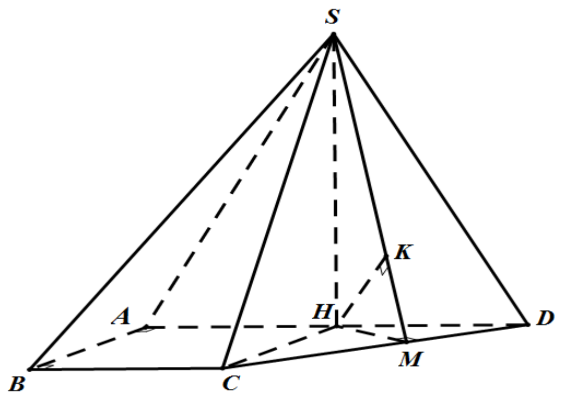
II. VẬN DỤNG

Câu 41. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a$, $AD=2a.$ Hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của AD và $SH=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $d=\dfrac{\sqrt{6}a}{8}$ **B.** $d=a$ **C.** $d=\dfrac{\sqrt{6}a}{4}$ **D.** $d=\dfrac{\sqrt{15}a}{5}$

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của CD, K là hình chiếu của H lên SM.

Tam giác HCD vuông tại H có $CD=a\sqrt{2}$ và $HM=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $BH//CD \Rightarrow d\left(B,(SCD)\right)=d\left(H,(SCD)\right)=HK$.

Tam giác SHM vuông tại H có $HK=\dfrac{HM.HS}{\sqrt{HM^2+HS^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$ (vì $BH//CD$)

Câu 42. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1\ (1)$. Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị lập thành tam giác nội tiếp trong đường tròn có bán kính $R=1$ bằng

A. $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$. **B .** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2+\sqrt{5}$. **D.** $-1+\sqrt{5}$.

$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right);\ \ y'=0 \Leftrightarrow x=0; x=\pm\sqrt{m}$ với $m>0$

Gọi $A(0;1), B\left(\sqrt{m};-m^2+1\right), C\left(-\sqrt{m};-m^2+1\right)$ là 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số (1); khi đó tam giác ΔABC cân tại A, I là tâm đường tròn đi qua A,B,C nên $I\in Oy$, gọi $I(0;b)$

Ta có: $IA=R=1 \Leftrightarrow 1-b=1 \Leftrightarrow b=0$

$IB = R = 1 \Leftrightarrow m + m^4 - 2m^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + m = 0$

$\Leftrightarrow m(m-1)(m^2+m-1) = 0 \Leftrightarrow m_1 = 0; m_2 = 1; m_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Kết hợp điều kiện $m > 0$ nên loại m_4 và m_1

Ta có $m_2^3 + m_3^3 = -1 + \sqrt{5}$. Vậy chọn đáp án D.

Câu 43. Biết hai đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - 2$ và $y = -x^2 + x$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt *A, B, C*. Khi đó, diện tích tam giác ABC bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^3 + x^2 - 2 = -x^2 + x$

$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \Rightarrow A(1;0); B(-1;-2); C(-2;-6) \\ x = -2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng AB là: $x - y - 1 = 0$

Khoảng cách từ C tới đường thẳng AB là: $d(C;AB) = \dfrac{|-2+6-1|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

$\overrightarrow{AB} = (-2;-2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{2} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{\sqrt{2}}.2\sqrt{2} = 3.$

Vậy diện tích tam giác ABC bằng 3.

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x) = 3x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x$. Biết $f(0) = 1$. Tính $f^2(-1)$.

A. $f^2(-1) = 2$. **B.** $f^2(-1) = 1$. **C.** $f^2(-1) = -1$. **D.** $f^2(-1) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có

$\int f'(x).f(x)\mathrm{d}x = \int (3x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}x^6 + x^5 + \dfrac{1}{2}x^4 + x^3 + x^2 + C$

$\Rightarrow \dfrac{f^2(x)}{2} = \dfrac{1}{2}x^6 + x^5 + \dfrac{1}{2}x^4 + x^3 + x^2 + C \Rightarrow \dfrac{f(x).f(x)}{2} = \dfrac{1}{2}x^6 + x^5 + \dfrac{1}{2}x^4 + x^3 + x^2 + C$.

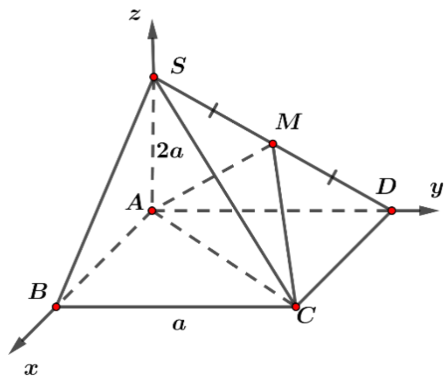
$\Rightarrow \dfrac{f(0).f(0)}{2} = C$. Do $f(0) = 1$ nên suy ra $C = \dfrac{1}{2}$ hay $\dfrac{f^2(x)}{2} = \dfrac{1}{2}x^6 + x^5 + \dfrac{1}{2}x^4 + x^3 + x^2 + \dfrac{1}{2}$

Vậy $\dfrac{f^2(-1)}{2} = \dfrac{1}{2} - 1 + \dfrac{1}{2} - 1 + 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow f^2(-1) = 1$.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Gọi φ góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC). Tính $\cos\varphi$

A. $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\cos\varphi=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **<u>D</u>.** $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Lời giải



Để thuận tiện trong việc tính toán ta chọn $a=1$.

Trong không gian, gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho gốc O trùng với điểm A, tia Ox chứa đoạn thẳng AB, tia Oy chứa đoạn thẳng AD, tia Oz chứa đoạn thẳng AS. Khi đó: $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $S(0;0;2)$, $D(0;1;0)$.

Vì M là trung điểm SD nên tọa độ M là $M\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{SB}=(1;0;-2)\\ \overrightarrow{BC}=(0;1;0)\end{cases}\Rightarrow \vec{n}_{(SBC)}=[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{BC}]=(2;0;1)$.

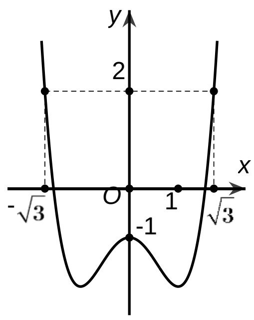
$\begin{cases}\overrightarrow{AM}=\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)\\ \overrightarrow{AC}=(1;1;0)\end{cases}\Rightarrow \vec{n}_{(AMC)}=[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}]=\left(-1;1;\dfrac{-1}{2}\right)$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (AMC) và (SBC).

Suy ra $\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{n}_{(SBC)};\vec{n}_{(AMC)}\right)\right|=\dfrac{\left|\vec{n}_{(SBC)}.\vec{n}_{(AMC)}\right|}{\left|\vec{n}_{(SBC)}\right|.\left|\vec{n}_{(AMC)}\right|}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

III. VẬN DỤNG CAO

Câu 46. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ



Xét phương trình $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x+m, x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$. Phương trình đã cho có nghiệm trên đoạn $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$ khi và chỉ khi

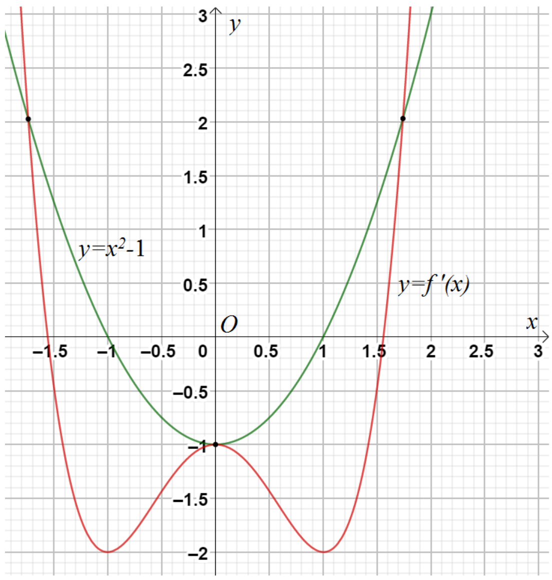
A. $f(\sqrt{3}) \le m \le f(-\sqrt{3})$.

B. $3f(\sqrt{3}) \le m \le 3f(-\sqrt{3})$.

C. $f(-\sqrt{3}) \le m \le f(\sqrt{3})$.

D. $3f(-\sqrt{3}) \le m \le 3f(\sqrt{3})$.

Lời giải



Xét $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$ với $x \in \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$.

Ta có $h'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$

x	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$
$h'(x)$	0	$-$	0	$-$	0
$h(x)$	$3f(-\sqrt{3})$	$\searrow$			$3f(\sqrt{3})$

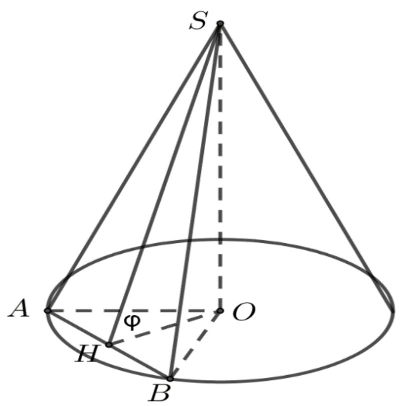
Vậy $\max\limits_{[-\sqrt{3};\sqrt{3}]} h(x) = h(-\sqrt{3}) = 3f(-\sqrt{3})$.

Câu 47. Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O bán kính R. Trên đường tròn (O) lấy hai điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông. Biết diện tích tam giác SAB bằng $R^2\sqrt{2}$. Thể tích hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{12}$. **B.** $\dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của đoạn AB.

Nhận thấy:

+) Tam giác OAB vuông cân tại O.

+) $OH \perp AB$, $SH \perp AB$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (OAB) bằng $\varphi = \widehat{SHO}$.

Ta có: $S_{\Delta OAB} = S_{\Delta SAB}.\cos\varphi \Rightarrow \frac{1}{2}R^2 = R^2\sqrt{2}.\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Mà $\cos\varphi = \frac{OH}{SH} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{SH} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow SH = \frac{R\sqrt{2}}{2}.2\sqrt{2} = 2R.$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{4R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{14}}{2}.$$

Vậy thể tích của khối nón bằng $V = \frac{1}{3}\pi R^2.SO = \frac{1}{3}\pi R^2.\frac{R\sqrt{14}}{2} = \frac{\pi R^3\sqrt{14}}{6}$.

Câu 48. Cho hai số thực a, b đều lớn hơn 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{2}{\log_{ab} a} + \frac{1}{\log_{\sqrt[9]{ab}} b} - \log_a b}.$$

A. $\frac{5}{3}$ **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{5}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{\sqrt{29}}{3}$.

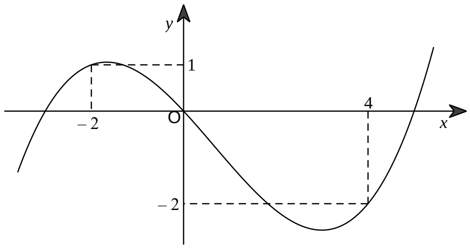
$$P = \sqrt{\frac{2}{\log_{ab} a} + \frac{1}{\log_{\sqrt[9]{ab}} b} - \log_a b} = \sqrt{2\log_a ab + \log_b\left(a^{\frac{1}{9}}b^{\frac{1}{9}}\right) - \log_a b}$$

$$P = \sqrt{2 + 2\log_a b + \frac{1}{9}\log_b a + \frac{1}{9} - \log_a b} = \sqrt{\frac{19}{9} + \log_a b + \frac{1}{9\log_a b}} \geq \sqrt{\frac{19}{9} + 2\sqrt{\log_a b\frac{1}{9\log_a b}}} = \sqrt{\frac{25}{9}}$$

(vì $a, b > 1 \Rightarrow \log_a b > \log_a 1 = 0$)

$$P_{\min} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \log_a b = \frac{1}{9\log_a b} \Leftrightarrow \log^2{}_a b = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_a b = \frac{1}{3} \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{a}.$$

Câu 49. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



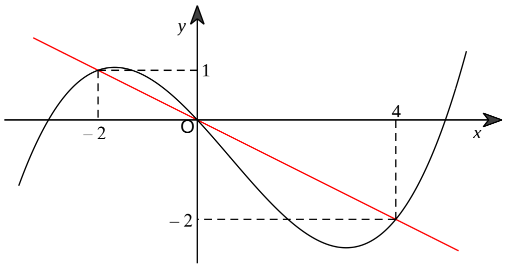
A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

Ta có : $g(x)=f(1-2x)+x^2-x \Rightarrow g'(x)=-2f'(1-2x)+2x-1$

Do đó : $g'(x)\le 0 \Leftrightarrow -2f'(1-2x)+2x-1\le 0 \Leftrightarrow f'(1-2x)\ge \frac{2x-1}{2}$

Đặt $t=1-2x$.

Vẽ đường thẳng $y=-\frac{x}{2}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục



Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Rightarrow g'(x)\le 0 \Rightarrow f'(t)\ge -\frac{t}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le t\le 0\\ t\ge 4\end{array}\right.$

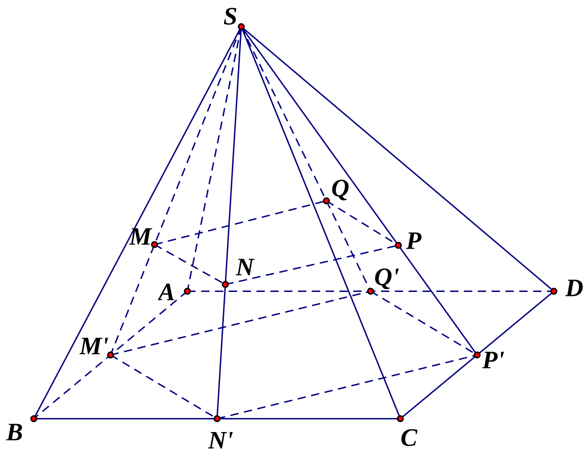
Như vậy $f'(1-2x)\ge \frac{1-2x}{-2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le 1-2x\le 0\\ 4\le 1-2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{2}\\ x\le -\frac{3}{2}\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$.

Mà $\left(1;\frac{3}{2}\right)\subset\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ nên hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;\frac{3}{2}\right)$

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích là V. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB,SBC,SCD,SDA và I là trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $I.MNPQ$ theo V ?

A. $\frac{2}{27}V$. B. $\frac{1}{27}V$. C. $\frac{2}{3}V$. D. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 V$.



Gọi M',N',P',Q' lần lượt là trung điểm của AB,BC,CD,DA. Khi đó ta có

$$V_{I.MNPQ} = \frac{1}{2}V_{S.MNPQ} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{9}V_{S.M'N'P'Q'} = \frac{4}{27}V_{S.M'N'P'Q'} = \frac{4}{27}.\frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{2}{27}V$$